

# SPECTRE DES ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES

## A PLUSIEURS INDETERMINEES

Paul-Jean CAHEN et Youssef HAOUAT

Dans tout cet article  $A$  désigne un anneau intègre de corps des fractions  $K$  ; on dit qu'un polynôme  $f \in K[\underline{X}]$ , où  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ , est à *valeurs entières* si, pour tout  $m$ -tuple  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$  de  $A^m$ ,  $f(\underline{a})$  appartient à  $A$ , on considère alors les anneaux de polynômes qui sont à valeurs entières, ainsi éventuellement que leurs dérivées ou leurs différences finies divisées. On propose ici une synthèse et une généralisation dans plusieurs directions de l'étude du spectre de ces anneaux. Le cas le plus classique est celui de l'anneau des polynômes à valeurs entières à une indéterminée sur un anneau de valuation discrète [16], [17]. D'une part on considère ici les polynômes à plusieurs indéterminées (comme déjà proposé, sur un anneau de Dedekind, par BRIZOLIS [3], [5] ou par CAHEN dans sa thèse [6]), d'autre part on y inclut les anneaux dont les dérivées ou les différences finies divisées jusqu'à l'ordre  $k$  sont à valeurs entières (suivant BRIZOLIS [4] et CAHEN [7] pour les dérivées à une indéterminée, CHABERT [18] pour les dérivées à plusieurs indéterminées et HAOUAT et GRAZZINI [22], [23], pour les différences finies divisées à une indéterminée), en outre on s'appuie sur de récentes contributions qui permettent de considérer le cas où  $A$  est un anneau noethérien de dimension 1 (comme proposé pour l'anneau des polynômes à valeurs entières à une indéterminée par CAHEN [10], [11] ou GILMER, HEINZER et LANTZ [26]). Pour finir, on propose encore d'autres généralisations en considérant notamment des couples d'anneaux partageant un idéal (complétant ainsi l'étude entreprise par les auteurs, dans le cas d'une indéterminée, sur un anneau de pseudo-valuation [13], [14]).

*Notations* : Pour une partie  $E$  de  $A^m$ , on note  $\text{Int}(E, A)$  l'anneau des polynômes (à  $m$  indéterminées sur  $K$ ) qui prennent sur  $E$  leurs valeurs dans  $A$ , soit

$$\text{Int}(E, A) = \{f \in K[\underline{X}] \mid f(E) \subset A\} \quad \text{où} \quad \underline{X} = (X_1, \dots, X_m) ;$$

si  $E = A^m$ , on note tout simplement  $\text{Int}(A^m)$ , au lieu de  $\text{Int}(A^m, A)$ , l'anneau des polynômes à valeurs entières de  $A$  (à  $m$  indéterminées), soit

$$\text{Int}(A^m) = \{f \in K[\underline{X}] \mid f(A^m) \subset A\}.$$

Si  $f$  appartient à  $K[\underline{X}]$ , on définit une différence finie divisée d'ordre 1 de  $f$ , pour  $h \neq 0$  dans  $A$ , par

$$\Delta_h^i f(\underline{X}) = \frac{f(X_1, \dots, X_i + h, \dots, X_m) - f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m)}{h},$$

puis les différences finies divisées d'ordre  $j$ , par récurrence sur  $j$ , par

$$\Delta_{h_1, \dots, h_j}^{i_1, \dots, i_j} f(\underline{X}) = \Delta_{h_j}^{i_j} (\Delta_{h_1, \dots, h_{j-1}}^{i_1, \dots, i_{j-1}} f),$$

où les indices  $i_1, \dots, i_j$  sont des entiers choisis entre 1 et  $m$  et  $h_1, \dots, h_j$  sont des éléments non nuls de  $A$ .

On note alors

- $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  l'anneau des polynômes (à  $m$  indéterminées sur  $K$ ) qui sont à valeurs entières ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre  $j$ , pour  $j \leq k$ ,
- $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$  l'anneau des polynômes (à  $m$  indéterminées sur  $K$ ) qui sont à valeurs entières ainsi que les différences finies divisées d'ordre  $j$ , pour  $j \leq k$ .
- $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m) = \bigcap_k \text{Int}_{D(k)}(A^m)$  (resp.  $\text{Int}_{\Delta(\infty)}(A^m) = \bigcap_k \text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ ) l'anneau des polynômes dont toutes les dérivées (resp. toutes les différences finies divisées) sont à valeurs entières.

On convient qu'on a en particulier  $\text{Int}_{D(0)}(A^m) = \text{Int}_{\Delta(0)}(A^m) = \text{Int}(A^m)$ . Enfin pour certaines questions on désigne par  $\text{Int}_*(A^m)$  l'un quelconque des anneaux  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  ou  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$  (où  $k$  est éventuellement nul ou infini).

Dans un premier paragraphe on établit d'abord un certain nombre d'inclusions entre tous ces anneaux ainsi que des propriétés de localisation ; il en résulte que les seules fibres non triviales du spectre de  $\text{Int}_*(A^m)$  (c'est-à-dire qui ne se réduisent pas à celles d'un anneau de polynômes) sont au-dessus d'un idéal premier de corps résiduel fini ; lorsque  $A$  est noethérien on peut donc se ramener au cas où  $A$  est local et de corps résiduel fini, et même de dimension 1, si  $A$  est suffisamment régulier pour que les idéaux premiers associés de  $K/A$  soient de hauteur 1 (par exemple  $A$  est intégralement clos).

Au deuxième paragraphe, supposant donc l'anneau  $A$  noethérien, local et de corps résiduel fini (le plus souvent de dimension 1), on établit des relations de dépendance intégrale.

Dans un troisième paragraphe, on suppose seulement qu'un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  est de corps résiduel fini et *pseudo-principal*, c'est-à-dire qu'il existe  $\pi$  dans  $\mathfrak{m}$  et un entier  $s$  tel que  $\mathfrak{m}^s \subset A\pi$  [13], [14] (c'est en particulier le cas si  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal d'un anneau local, noethérien et de dimension 1) ; on montre alors que la fibre de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  est formée d'idéaux maximaux de corps résiduel fini et que, dans le cas de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ , cette fibre est en bijection avec  $(A/\mathfrak{m})^m$ .

Au paragraphe suivant, on étudie la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  dans le cas où  $A$  est noethérien, local de dimension 1 et de corps résiduel fini ; pour  $k < \infty$ , la nature de celle-ci dépend de la clôture intégrale  $A'$  de  $A$  : on montre d'abord que lorsque l'anneau  $A$  est *unibranche* (c'est-à-dire que  $A'$  est un anneau local) cette fibre est en bijection avec les points de  $\overline{A}^m$ , où  $\overline{A}$  désigne la fermeture topologique de  $A$  dans le complété  $\widehat{A}'$  de  $A'$  (qui est alors un anneau de valuation discrète), tandis qu'elle est finie si  $A$  n'est pas unibranche ; on montre enfin que, lorsque  $A$  est de caractéristique 0, la fibre de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  est toujours finie.

Au cinquième paragraphe on considère un couple d'anneaux  $A \subset B$ , partageant un idéal  $\mathfrak{m}$  pseudo-principal dans  $B$  (donc dans  $A$ , car on établit tout d'abord que les deux conditions sont équivalentes) ; si  $B$  est un anneau de valuation de corps résiduel fini ( $A$  est alors un anneau de *pseudo-valuation* [24], [25]) on ramène alors l'étude de la fibre de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  au dessus de  $\mathfrak{m}$  à celle d'un anneau local, noethérien, de dimension 1 et unibranche ; si au contraire le cardinal de  $B/\mathfrak{m}$  est infini et si  $\text{Int}(B^m)$  est inclus dans  $B[\underline{X}]$  (notamment si  $B$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ), on montre que cette fibre est en bijection avec  $(A/\mathfrak{m})^m$ .

Enfin, au sixième et dernier paragraphe, on montre que pour un couple d'anneaux  $A \subset B$  partageant un idéal  $\mathfrak{m}$ , tel que  $\text{Int}_*(A^m)$  soit inclus dans  $B[\underline{X}]$  (notamment pour un anneau de pseudo-valuation d'idéal maximal non pseudo-principal) la fibre de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  est de dimension supérieure ou égale à  $m$  (contrairement aux cas précédents où elle est de dimension 0) ; les résultats de ces deux derniers paragraphes généralisent donc l'étude par les auteurs des polynômes à valeurs entières à une indéterminée sur un anneau de pseudo-valuation [13], [14].

## §1 - Inclusions, localisation

Certaines inclusions découlent immédiatement des définitions :

PROPOSITION 1.1 : *Pour tout anneau  $A$  on a les inclusions*

$$\begin{aligned} A[\underline{X}] &\subset \text{Int}_{\Delta(k+1)}(A^m) \subset \text{Int}_{\Delta(k)}(A^m) \subset \text{Int}(A^m), \\ A[\underline{X}] &\subset \text{Int}_{D(k+1)}(A^m) \subset \text{Int}_{D(k)}(A^m) \subset \text{Int}(A^m). \end{aligned}$$

En outre :

PROPOSITION 1.2 : *Pour tout anneau  $A$  on a l'inclusion*

$$\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m) \subset \text{Int}_{D(k)}(A^m) .$$

C'est la généralisation à plusieurs indéterminées d'un résultat de HAOUAT et GRAZZINI [22, p.1172] ; pour le démontrer on établit au préalable un lemme (comme le fait CHABERT [20]) :

LEMME 1.3 : *Si  $f$  appartient à  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ , alors toutes ses dérivées partielles du premier ordre appartiennent à  $\text{Int}_{\Delta(k-1)}(A^m)$ .*

*Démonstration* : Pour tout polynôme  $f$  de  $K[\underline{X}] = K[X_1, \dots, X_m]$ , on a

$$f(X_1, \dots, X_i + Y, \dots, X_m) = f(\underline{X}) + Y \frac{\partial f}{\partial X_i}(\underline{X}) + Y^2 f_2(\underline{X}, Y)$$

où  $f_2(\underline{X}, Y)$  est un polynôme à  $m+1$  indéterminées  $(X_1, \dots, X_m, Y)$ . Soit donc  $h$  un élément non nul de  $A$  tel que  $hf_2(\underline{X}, Y) \in A[\underline{X}, Y]$ , alors

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}(\underline{X}) = \frac{f(X_1, \dots, X_i + h, \dots, X_m) - f(X_1, \dots, X_m)}{h} - hf_2(\underline{X}, h)$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}(\underline{X}) = \Delta_h^i f(\underline{X}) - hf_2(\underline{X}, h)$$

où  $hf_2(\underline{X}, h) \in A[\underline{X}]$ , donc, si  $f$  est dans  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ , alors  $\Delta_h^i f(\underline{X})$  est dans  $\text{Int}_{\Delta(k-1)}(A^m)$  et  $\frac{\partial f}{\partial X_i}(\underline{X})$  aussi ■

*Démonstration de la proposition* : On raisonne par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , on a  $\text{Int}_{\Delta(0)}(A^m) = \text{Int}_{D(0)}(A^m) = \text{Int}(A^m)$ ; soit donc  $k > 0$ , si  $f$  est dans  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ ,



finies divisées à une indéterminée [23, prop.1] ; on traite d'abord le cas de  $\text{Int}(A^m)$  dans un lemme :

LEMME 1.5 : *Soit  $T$  une partie multiplicative de  $A$  ; si un polynôme à  $m$  indéterminées prend sur  $A^m$  ses valeurs dans  $A$ , il prend alors sur  $(T^{-1}A)^m$  ses valeurs dans  $T^{-1}A$ .*

*Démonstration* : On fait une récurrence sur  $m$  ; pour  $m = 1$  c'est un résultat classique [12, prop.5, cor.1] ; soit donc  $f \in \text{Int}(A^m)$ , où  $m \geq 2$  ; pour tout  $a \in A$ , le polynôme à  $m - 1$  indéterminées  $f(X_1, \dots, X_{m-1}, a)$  prend sur  $A^{m-1}$  ses valeurs dans  $A$  et donc, par hypothèse de récurrence, sur  $(T^{-1}A)^{m-1}$  ses valeurs dans  $T^{-1}A$  ; maintenant si on choisit  $a_1, \dots, a_{m-1}$  dans  $T^{-1}A$ , alors le polynôme à une indéterminée  $f(a_1, \dots, a_{m-1}, X)$  prend sur  $A$  ses valeurs dans  $T^{-1}A$ , il prend donc sur  $T^{-1}A$  ses valeurs dans  $T^{-1}A$  ■

PROPOSITION 1.6 : *Soit  $T$  une partie multiplicative de  $A$  ; on a l'inclusion :*

$$T^{-1}\text{Int}_*(A^m) \subset \text{Int}_*(T^{-1}A^m) .$$

*Démonstration* : Le lemme s'applique immédiatement aux dérivées d'un polynôme et pour les différences finies divisées, il suffit de considérer le polynôme  $\Delta_{h_1, \dots, h_j}^{i_1, \dots, i_j} f$  comme la valeur en  $h_1, \dots, h_j$  d'un polynôme à  $m + j$  indéterminées ■

On peut alors disposer rapidement des cas triviaux :

PROPOSITION 1.7 : *Si les idéaux premiers de  $A$  sont de corps résiduel infini, alors  $\text{Int}(A^m) = \text{Int}_*(A^m) = A[\underline{X}]$ .*

*Démonstration* : Il suffit bien sûr de montrer que  $\text{Int}(A^m) = A[\underline{X}]$  [proposition 1.1] et on raisonne par récurrence sur  $m$  ; pour  $m = 1$ , c'est un résultat de CAHEN et CHABERT [12, prop.5, cor.2] et si  $\text{Int}(A^{m-1}) = A[X_1, \dots, X_{m-1}]$ , alors les idéaux premiers de  $\text{Int}(A^{m-1})$  sont de corps résiduel infini donc, réappliquant le cas d'une indéterminée,  $\text{Int}(A^m) = \text{Int}(\text{Int}(A^{m-1})) = A[X_1, \dots, X_{m-1}][X_m]$  [proposition 1.4] ■

COROLLAIRE 1.8 : *Soit  $\mathcal{F}$  une famille d'idéaux premiers de  $A$  telle que  $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{F}} A_{\mathfrak{p}}$  ; si les idéaux de  $\mathcal{F}$  sont de corps résiduel infini, alors  $A[\underline{X}] = \text{Int}_*(A^m) = \text{Int}(A^m)$ .*

*Démonstration* : Si  $\mathfrak{p}$  est de corps résiduel infini, il résulte de la proposition précédente que  $\text{Int}(A_{\mathfrak{p}}^m) = A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]$ , et de la proposition 1.6 qu'on a les inclusions

$$A[\underline{X}] \subset \text{Int}_*(A^m) \subset \text{Int}_*(A_{\mathfrak{p}}^m) \subset \text{Int}(A_{\mathfrak{p}}^m) = A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}] \quad \blacksquare$$

Si par exemple  $A$  est un anneau de Krull coéquidimensionnel et de dimension supérieure à 1, on peut prendre pour famille  $\mathcal{F}$  l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1.

Dans le cas noethérien, l'inclusion de la proposition 1.6 devient une égalité :

**PROPOSITION 1.9 :** *Soit  $T$  une partie multiplicative d'un anneau noethérien  $A$  ; on a l'égalité  $T^{-1}\text{Int}_*(A^m) = \text{Int}_*(T^{-1}A^m)$ .*

*Démonstration :* Il reste à établir l'inclusion  $\text{Int}_*(T^{-1}A^m) \subset T^{-1}\text{Int}_*(A^m)$  ; soit donc  $f \in \text{Int}_*(T^{-1}A^m)$ ,  $f$  et ses dérivées ou ses différences finies divisées jusqu'à l'ordre  $k$  sont alors à valeurs dans  $T^{-1}A$  sur  $T^{-1}A$  ; on note qu'il s'agit d'un ensemble fini de polynômes car, même dans le cas de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  ou de  $\text{Int}_{\Delta(\infty)}(A^m)$ , les dérivées ou les différences finies divisées d'ordre strictement supérieur au degré du polynôme  $f$  sont nulles. Le  $A$ -module engendré par les valeurs prises sur  $A$  par cet ensemble de polynômes est contenu dans le  $A$ -module de type fini engendré par leurs coefficients, comme  $A$  est noethérien, ce module est lui-même de type fini, il existe donc un dénominateur commun  $s \in T$  à ces valeurs, d'où  $sf \in \text{Int}_*(A^m)$ , soit  $f \in T^{-1}\text{Int}_*(A^m)$  ■

Pour un anneau noethérien, on peut donc toujours se ramener au cas local, si en outre  $A$  est intégralement clos ou vérifie simplement la propriété  $S(2)$  (c'est-à-dire que les idéaux premiers associés de  $K/A$  sont de hauteur 1) on peut se limiter au cas où  $A$  est de dimension 1 et de corps résiduel fini ; autrement dit les seules fibres non triviales du spectre de  $\text{Int}_*(A^m)$  sont alors celles qui sont au-dessus d'un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de hauteur 1 et de corps résiduel fini et on a l'égalité  $\text{Int}_*(A^m)_{\mathfrak{m}} = \text{Int}_*(A_{\mathfrak{m}}^m)$ .

## §2 - Dépendance intégrale

On établit ici certaines propriétés de dépendance intégrale, dans le cas où  $A$  est noethérien (le plus souvent local de dimension 1), pour les anneaux de polynômes à valeurs entières sur une partie  $E$ . On note  $A'$  la clôture intégrale de  $A$ . On établit d'abord un lemme [11, lemme 2.2] :

**LEMME 2.1 :** *Soient  $A$  un anneau noethérien de clôture intégrale  $A'$ ,  $E$  une partie de  $A^m$  et  $f \in \text{Int}(E, A')$  ; alors  $f(E)$  est inclus dans une  $A$ -algèbre finie  $R$  telle que  $A \subset R \subset A'$ .*

*Démonstration :* Il existe un élément non nul  $d$  de  $A$  tel que  $df \in A[\underline{X}]$  ainsi  $f(E)$  est inclus dans le  $A$ -module  $M = A' \cap (1/d)A$  ; comme  $A$  est noethérien et que  $M$  est inclus dans le

$A$ -module de type  $(1/d)A$ ,  $M$  est lui-même engendré par un nombre fini d'éléments de  $A'$ ,  $x_1, \dots, x_r$ , d'où  $f(E)$  est inclus dans la  $A$ -algèbre finie  $R = D[x_1, \dots, x_r]$  ■

On généralise ensuite à plusieurs indéterminées et à une partie quelconque de  $A^m$  un résultat de GILMER, HEINZER et LANTZ [26,prop.2.2] :

**PROPOSITION 2.2 :** *Soient  $A$  un anneau noethérien local, de dimension 1, de corps résiduel fini et de clôture intégrale  $A'$  et  $E$  une partie de  $A^m$  ; alors  $\text{Int}(E, A')$  est la clôture intégrale de  $\text{Int}(E, A)$ .*

*Démonstration :* - D'abord  $\text{Int}(E, A')$  est intégralement clos : en effet, son corps des fractions est le corps des fractions rationnelles  $K(\underline{X})$  (à  $m$  indéterminées, où  $K$  est le corps des fractions de  $A$  et de  $A'$ ) et si  $f \in K(\underline{X})$  est entier sur  $\text{Int}(E, A')$  alors  $f \in K[\underline{X}]$  (puisque a fortiori  $f$  est entier sur  $K[\underline{X}]$  qui est intégralement clos) et en écrivant une relation de dépendance intégrale soit

$$f^n + g_{n-1}f^{n-1} + \dots + g_0, \text{ où } g_i \in \text{Int}(E, A'), 0 \leq i \leq n-1,$$

on voit que, pour tout  $\underline{x} \in E$ ,  $f(\underline{x})$  est entier sur  $A'$ , donc que  $f(\underline{x}) \in A'$ , soit  $f \in \text{Int}(E, A')$ .

- Ensuite  $\text{Int}(E, A')$  est entier sur  $\text{Int}(E, A)$  : soit en effet  $f \in \text{Int}(E, A')$ , alors  $f(E)$  est inclus dans une  $A$ -algèbre finie  $R$  telle que  $A \subset R \subset A'$  [lemme 2.1] ; si  $J$  est le radical de Jacobson de  $R$ ,  $J$  est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux maximaux de  $R$  de corps résiduel fini, il existe donc un entier  $q$  tel que, pour tout  $x \in R$ ,  $(x^q - x) \in J$  ; comme le conducteur  $[A : R]$  est non nul, il existe un entier  $n$  tel que  $J^n \subset [A : R]$ , donc, pour tout  $x \in R$ , on a  $(x^q - x)^n \in A$ , mais alors  $(f^q - f)^n = h$  prend sur  $E$  ses valeurs dans  $A$ , en conclusion  $f$  est racine du polynôme unitaire  $(Y^q - Y)^n - h$  à coefficients dans  $\text{Int}(E, A)$  ■

Le proposition précédente peut être précisée dans le cas où  $A$  est unibranche, c'est-à-dire où  $A'$  est local [26, th 3.1] et [11, prop.2.6] :

**PROPOSITION 2.3 :** *Soient  $A$  un anneau noethérien local, de dimension 1, unibranche et de corps résiduel fini et  $E$  une partie de  $A^m$  ; alors  $\text{Int}(E, A')$  est une extension radicale de  $\text{Int}(E, A)$  : pour tout  $f \in \text{Int}(E, A')$  il existe un entier  $n$  tel que  $f^n \in \text{Int}(E, A)$ .*

*Démonstration :* Comme ci-dessus, soit  $f \in \text{Int}(E, A')$ , alors  $f(E)$  est inclus dans une  $A$ -algèbre finie  $R$  telle que  $A \subset R \subset A'$ . Puisque  $A$  est unibranche,  $R$  est local, d'idéal maximal  $\mathfrak{n}$  et de corps résiduel fini ; si  $q$  est le cardinal de  $R/\mathfrak{n}$ , alors, pour tout  $x \in R$ , on a  $x^{q-1} = \varepsilon + y$ , où  $\varepsilon = 0$  ou  $1$  (donc  $\varepsilon \in A$ ) et  $y \in \mathfrak{n}$  ; si  $p$  est la caractéristique de  $R/\mathfrak{n}$ , il résulte facilement

d'une propriété des coefficients binomiaux qu'on a  $(x^{q-1})^p = \varepsilon_1 + y_1$ , où  $\varepsilon_1 \in A$  et  $y_1 \in \mathfrak{n}^2$  et que, par récurrence sur  $s$ ,  $(x^{q-1})^{p^s} = \varepsilon_s + y_s$ , où  $\varepsilon_s \in A$  et  $y_s \in \mathfrak{n}^{s+1}$ ; or pour  $s$  grand,  $\mathfrak{n}^{s+1}$  est contenu dans le conducteur (non trivial)  $[A : R]$ , donc, posant  $n = (q-1)p^s$ , on a  $x^n \in A$ , pour tout  $x \in R$ , soit  $f^n \in \text{Int}(E, A)$  ■

On montre enfin que  $\text{Int}(A^m)$  est une extension radicale de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , comme pour une indéterminée [18, prop. 4.1] :

**PROPOSITION 2.4 :** *Soient  $A$  un anneau noethérien local, de dimension 1 et de corps résiduel fini; alors, pour  $k < \infty$ ,  $\text{Int}(A^m)$  est une extension radicale de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  : pour tout  $f \in \text{Int}(A^m)$ , il existe un entier  $n$  tel que  $f^n \in \text{Int}_{D(k)}(A^m)$ .*

*Démonstration :* Soit  $f \in \text{Int}(A^m)$  et  $d$  un dénominateur commun des dérivées de  $f$  d'ordre  $j \leq k$ ; si  $p$  est la caractéristique du corps résiduel de  $A$ , alors il existe un entier  $s$  tel que  $p^s \in dA$  (car  $A$  est de dimension 1 et  $p$  est dans l'idéal maximal de  $A$ , si  $A$  est de caractéristique  $p$  il suffit d'ailleurs de prendre  $s = 1$ ), on pose  $n = p^{ks}$ , on a donc  $\frac{\partial(f^n)}{\partial X_i} = n f^{n-1} \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right) = (p^{(k-1)s} f^{n-1}) (p^s \frac{\partial f}{\partial X_i})$ , mais alors  $p^s \frac{\partial f}{\partial X_i} \in A[X]$  et (comme on le voit par une récurrence facile sur  $k$ ) les dérivées de  $p^{(k-1)s} f^{n-1}$ , d'ordre  $j \leq k-1$ , sont à valeurs dans  $A$ , ainsi  $f^n \in \text{Int}_{D(k)}(A^m)$  ■

### §3 - Idéal pseudo-principal

On dit qu'un idéal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  est *pseudo-principal* s'il existe  $\pi$  dans  $\mathfrak{m}$  et un entier  $s$  tel que  $\mathfrak{m}^s \subset A\pi$  [13], [14]. C'est en particulier le cas si  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal d'un anneau local, noethérien et de dimension 1.

On commence par un lemme technique où on suppose seulement que le corps résiduel de  $\mathfrak{m}$  est de caractéristique  $p$  :

**LEMME 3.1 :** *Soit  $A$  un anneau et  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $A$  dont le corps résiduel est de caractéristique  $p$ ; si  $f$  est un polynôme de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  (resp. de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ ) qui prend ses valeurs dans  $\mathfrak{m}$ , et si  $n = p^r$ , alors  $f^n$  et ses dérivées (resp. ses différences finies divisées) d'ordre  $j \leq k$  prennent leurs valeurs dans  $\mathfrak{m}^r$ .*

*Démonstration :* On observe d'abord qu'on a  $n = p^r > r$  donc que  $f^n$  prend ses valeurs dans  $\mathfrak{m}^r$ , ensuite on distingue le cas des dérivées et des différences finies divisées :

- Si  $f \in \text{Int}_{D(k)}(A^m)$ ; on a la formule  $\frac{\partial(f^n)}{\partial X_i}(\underline{X}) = n f^{n-1} \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)(\underline{X})$ . Le facteur  $f^{n-1} \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)(\underline{X})$  est dans  $\text{Int}_{D(k-1)}(A^m)$  et  $n \in \mathfrak{m}^r$ , donc  $\frac{\partial(f^n)}{\partial X_i}(\underline{X})$  est à valeurs dans  $\mathfrak{m}^r$  ainsi que ses dérivées d'ordre  $j \leq k-1$ .

- Pour les différences finies divisées, on fait une récurrence sur  $k$ ; le résultat est trivial pour  $k=0$ , on le suppose vrai pour  $k-1$  et on considère  $f$  dans  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ ; on note  $\Delta f(\underline{X})$  la différence

$$\Delta f(\underline{X}) = f(X_1, \dots, X_i + h, \dots, X_m) - f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m) = h \Delta_h^i f(\underline{X}),$$

on a alors

$$\Delta_h^i (f^n)(\underline{X}) = \frac{(f + \Delta f)^n - f^n}{h} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f^{n-i}(\underline{X}) h^{i-1} (\Delta_h^i f)^i(\underline{X}).$$

Pour les premiers termes de la somme ( $1 \leq i \leq n-1$ ), le facteur  $f^{n-i}(\underline{X}) h^{i-1} (\Delta_h^i f)^i(\underline{X})$  est dans  $\text{Int}_{\Delta(k-1)}(A^m)$  et le coefficient binomial  $\binom{n}{i}$  est dans  $\mathfrak{m}^r$ ; pour le dernier terme ( $i=n$ ), soit  $h^{n-1} (\Delta_h^n f)^n(\underline{X})$ , le facteur  $h^{n-1}$  est dans  $A$  et les différences finies divisées d'ordre  $j \leq k-1$  de  $(\Delta_h^i f)^n(\underline{X})$  sont à valeurs dans  $\mathfrak{m}^r$ , par hypothèse de récurrence. ■

On note que le lemme ci-dessus s'applique au cas où  $k = \infty$ , soit à  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  et à  $\text{Int}_{\Delta(\infty)}(A^m)$ .

Dans la suite du paragraphe on suppose que  $\mathfrak{m}$  est pseudo-principal et de corps résiduel fini (donc maximal); on note  $(u_0, u_1, \dots, u_{q-1})$  un système de représentants de  $A$  modulo  $\mathfrak{m}$ . On montre d'abord que la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de tous les anneaux  $\text{Int}_*(A^m)$  est alors de dimension 0 :

**PROPOSITION 3.2 :** *Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal pseudo-principal et de corps résiduel fini de  $A$ ; alors les idéaux premiers de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont maximaux et de corps résiduel isomorphe à  $A/\mathfrak{m}$ .*

*Démonstration :* Soit  $\mathfrak{P}$  un premier au-dessus de  $\mathfrak{m}$ , si  $f \in \text{Int}_*(A^m)$ , alors le produit

$h = \prod_{i=0}^{q-1} (f - u_i)$  prend ses valeurs dans  $\mathfrak{m}$ ; or par hypothèse  $\mathfrak{m}^s \subset A\pi$ , où  $\pi \in \mathfrak{m}$ , et il

résulte du lemme ci-dessus que pour  $n = p^s$ ,  $h^n = \prod_{i=0}^{q-1} (f - u_i)^n$  prend ses valeurs dans  $\mathfrak{m}^s$

ainsi que ses dérivées (ou ses différences finies divisées) donc dans  $A\pi$ ; ainsi  $\frac{h^n}{\pi} \in \text{Int}_*(A^m)$

soit  $h^n \in \pi \text{Int}_*(A^m) \subset \mathfrak{m} \text{Int}_*(A^m) \subset \mathfrak{P}$ ; en conclusion l'un des facteurs  $(f - u_i)$  est dans  $\mathfrak{P}$  ■

Pour tout idéal premier  $\mathfrak{m}$  de  $A$  et tout  $\underline{a} \in A^m$ , on note  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$  l'idéal de  $\text{Int}_*(A^m)$  formé des polynômes qui prennent en  $\underline{a}$  leur valeur dans  $\mathfrak{m}$ , c'est un idéal maximal de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ . On donne une condition suffisante pour que les idéaux premiers de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  soient tous de ce type et en nombre fini, celle-ci nous sera souvent utile par la suite :

LEMME 3.3 : Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal de  $A$  pseudo-principal et de corps résiduel fini. S'il existe un idéal  $\mathfrak{q}$  de  $A$ , de quotient fini, tel que  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{b}}$  dans  $\text{Int}_*(A^m)$ , lorsque  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$  et  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$  vérifient  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{q}}$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , alors les idéaux premiers de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \{f \in \text{Int}_*(A^m) \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{M}\}$  et en nombre fini.

Démonstration : Soit  $\Pi$  le produit des idéaux de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$ , où les composantes  $a_i$  de  $\underline{a}$  parcourent un système de représentants modulo  $\mathfrak{q}$ ; si  $f \in \Pi$ , alors  $f$  est à valeurs dans  $\mathfrak{m}$  (en effet, pour tout  $\underline{x}$  de  $A^m$ , il existe par hypothèse un idéal  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$ , facteur de  $\Pi$ , tel que  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{x}}$ ); mais alors pour  $n = p^s$ ,  $f^n$  prend ses valeurs dans  $\mathfrak{m}^s$ , donc dans  $A\pi$ , ainsi que ses dérivées (ou ses différences finies divisées) [lemme 3.1]; si  $\mathfrak{P}$  est au-dessus de  $\mathfrak{m}$ , alors  $f^n \in \pi \text{Int}_*(A^m) \subset \mathfrak{P}$ , d'où  $f \in \mathfrak{P}$  et on tire l'inclusion  $\Pi \subset \mathfrak{P}$ , ainsi l'un des facteurs  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$  de  $\Pi$  est inclus dans  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{P}$ , puisque  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$  est maximal [proposition 3.2]; la finitude de la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  résulte enfin de celle du quotient  $A/\mathfrak{q}$  ■

Remarque 3.4 : Si  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$  et  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ , sont tels qu'il existe un entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tel que  $a_i \not\equiv b_i \pmod{\mathfrak{m}}$ , alors  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$  et  $\mathfrak{M}_{\underline{b}}$  sont toujours distincts dans  $\text{Int}_*(A^m)$  (en effet, le polynôme  $(X_i - a_i)$  est dans  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$  mais non dans  $\mathfrak{M}_{\underline{b}}$ ), en particulier l'idéal  $\mathfrak{q}$  du lemme ci-dessus est nécessairement inclus dans  $\mathfrak{m}$ .

On peut maintenant déterminer entièrement la fibre de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ , pour  $k \geq 1$  (éventuellement infini), au-dessus d'un idéal pseudo-principal (de corps résiduel fini) :

THÉORÈME 3.5 : Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal de  $A$ , pseudo-principal et de corps résiduel fini; alors les idéaux premiers de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ , pour  $k \geq 1$ , sont tous de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \{f \in \text{Int}_{\Delta(k)}(A^m) \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}\}$  et en bijection avec  $(A/\mathfrak{M})^m$  :  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{b}}$ , où  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$  et  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ , si et seulement si  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{m}}$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

*Démonstration* : Compte tenu de la remarque et du lemme précédents, il suffit d'établir que si  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{m}}$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , alors  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{b}}$  dans  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$  (lorsque  $k \geq 1$ ) ; or

$$f(a_1, a_2, \dots, a_m) - f(b_1, a_2, \dots, a_m) = (a_1 - b_1)\Delta_h^1 f(b_1, a_2, \dots, a_m),$$

où  $h = (a_1 - b_1) \in \mathfrak{m}$ , donc  $f(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathfrak{m}$  si et seulement si  $f(b_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathfrak{m}$  et, de proche en proche,  $f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}$  si et seulement si  $f(\underline{b}) \in \mathfrak{m}$  ■

#### §4 - Dérivées à valeurs entières sur un anneau noethérien

Dans tout ce paragraphe, on suppose  $A$  noethérien ; on se limite au cas où  $A$  est local, de dimension 1, et de corps résiduel fini, sans trop perdre de généralité [§1] ; on note que l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  est alors pseudo-principal ainsi, après avoir réglé le cas de la fibre de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$  au dessus de  $\mathfrak{m}$  [théorème 3.5], on étudie ici celle de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ .

On s'intéresse d'abord au cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète. Reprenant un résultat déjà établi par Brizolis, dans le cadre de plusieurs indéterminées [3, th 1.15], on le généralise sans difficulté à l'anneau  $\text{Int}(E, A)$  des polynômes à valeurs entières sur une partie de  $E$  de  $A^m$  :

**LEMME 4.1** : *Soient  $A$  un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel fini, et  $E$  une partie de  $A^m$  ; les idéaux premiers de  $\text{Int}(E, A)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont en bijection avec les éléments de la fermeture topologique  $\overline{E}$  de  $E$  dans  $\widehat{A}^m$  (où  $\widehat{A}$  désigne la complétion de  $A$ ) : à tout point  $\underline{\alpha}$  de  $\overline{E}$  correspond l'idéal premier  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} = \{f \in \text{Int}(E, A) \mid f(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}\}$ .*

*Démonstration* : C'est une répétition facile du cas des polynômes à valeurs entières à une indéterminée (où  $m = 1$  et  $E = A$  [16, prop.1], [17, §4 et §5]) :  $\mathfrak{m}$  est principal engendré par une uniformisante  $\pi$ , ainsi l'idéal  $\mathcal{J}$  des polynômes à valeurs dans  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathcal{J} = \{f \in \text{Int}(E, A) \mid f(E) \subset \mathfrak{m}\}$ , est lui-même principal, soit  $\mathcal{J} = \pi \text{Int}(E, A)$  ; tout polynôme à valeurs entières sur  $E$  se prolonge en une fonction continue de la fermeture topologique  $\overline{E}$  de  $E$  dans  $\widehat{A}^m$  à valeurs dans  $\widehat{A}$ , d'où les inclusions

$$\text{Int}(A^m) \subset \text{Int}(E, A) \subset \mathcal{C}(\overline{E}, \widehat{A}) ;$$

on a par ailleurs l'égalité

$$\mathcal{J} = \text{Int}(E, A) \cap \mathcal{C}(\overline{E}, \widehat{\mathfrak{m}}),$$

d'où par quotient, notant  $k$  le corps résiduel  $A/\mathfrak{m}$ , qui est isomorphe à  $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}$  :

$$\text{Int}(E, A)/\mathcal{J} \subset \mathcal{C}(\overline{E}, \widehat{A})/\mathcal{C}(\overline{E}, \widehat{\mathfrak{m}}) = \mathcal{C}(\overline{E}, k)$$

( où  $\mathcal{C}(\overline{E}, k)$  est l'anneau des fonctions localement constantes de  $\overline{E}$  dans  $k$ ).

Les premiers de  $\text{Int}(E, A)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ , sont les premiers contenant  $\pi$  donc  $\mathcal{J}$  et ils sont tous maximaux [proposition 3.2], ainsi tout premier de  $\text{Int}(E, A)/\mathcal{J}$  est minimal et se relève dans  $\mathcal{C}(\overline{E}, k)$  ou encore tout premier de  $\text{Int}(E, A)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  se relève dans  $\mathcal{C}(\overline{E}, \widehat{A})$ .

Comme  $\overline{E}$  est compact (étant fermé dans  $\widehat{A}^m$ ), les idéaux premiers de  $\mathcal{C}(\overline{E}, k)$  sont en bijection avec les points de  $\overline{E}$  : à tout  $\underline{\alpha}$  correspond l'idéal des fonctions nulles en  $\underline{\alpha}$  [2, II §4 exercice 17]. En conclusion, les premiers de  $\text{Int}(E, A)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} = \{f \in \text{Int}(E, A) \mid f(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}\}$ .

Il reste à établir que pour  $\underline{\alpha} \neq \underline{\beta}$ , on a  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} \neq \mathfrak{M}_{\underline{\beta}}$ ; or, si  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  est distinct de  $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ , il existe un entier  $i, 1 \leq i \leq m$ , tel que  $\alpha_i \neq \beta_i$  et donc un polynôme  $f$  en  $X_i$  à valeurs entières sur  $A$ , tel que  $f(\alpha_i) \in \widehat{\mathfrak{m}}$  mais  $f(\beta_i) \notin \widehat{\mathfrak{m}}$  (parce que l'anneau des polynômes à valeurs entières à une indéterminée est dense dans  $\mathcal{C}(\widehat{A}, \widehat{A})$  [15, §4]), or  $f$  peut être considéré comme un polynôme à  $m$  indéterminées et a fortiori comme un élément de  $\text{Int}(E, A)$ , puisque  $\text{Int}(A^m) \subset \text{Int}(E, A)$  ■

On détermine maintenant la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  lorsque  $A$  est un anneau noethérien local, de dimension 1, de corps résiduel fini et unibranche (c'est-à-dire que la clôture intégrale de  $A$  est un anneau local), généralisant ainsi les résultats de CAHEN [7, th.3.3] et de CHABERT [18, §7.2] sur un anneau de valuation discrète, respectivement pour une et pour plusieurs indéterminées, ou encore de CAHEN pour l'anneau  $\text{Int}(A)$  des polynômes à valeurs entières à une indéterminée sur un tel anneau  $A$  [11, th.3.4] :

**THÉORÈME 4.2 :** *Soient  $A$  un anneau noethérien local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de dimension 1, de corps résiduel fini et unibranche,  $A'$  sa clôture intégrale et  $\mathfrak{m}'$  l'idéal maximal de  $A'$ ; alors, pour  $k < \infty$ , la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , est en bijection avec  $\overline{A}^m$ , où  $\overline{A}$  désigne la fermeture topologique de  $A$  dans le complété  $\widehat{A}'$  de  $A'$  : à tout point  $\underline{\alpha}$  de  $\overline{A}^m$  correspond l'idéal premier  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} = \{f \in \text{Int}_{D(k)}(A^m) \mid f(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}'\}$ .*

*Démonstration :* Considérant  $A^m$  comme une partie de  $A'^m$ , alors  $\text{Int}(A^m, A')$  est une extension radicale de  $\text{Int}(A^m)$  [proposition 2.3] qui est lui-même une extension radicale de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  [proposition 2.4], donc  $\text{Int}(A^m, A')$  est à son tour une extension radicale, en particulier entière de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ ; ainsi tous les premiers de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  se relèvent dans

$\text{Int}(A^m, A')$  ; d'après le lemme précédent ceux qui sont au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont alors de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} = \{f \in \text{Int}_{D(k)}(A^m) \mid f(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}'\}$ , où  $\underline{\alpha}$  est un élément de  $\overline{A^m}$  ; de plus, si  $\underline{\alpha} \neq \underline{\beta}$ , il existe  $f \in \text{Int}(A^m, A')$  tel que  $f(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}'$  mais  $f(\underline{\beta}) \notin \widehat{\mathfrak{m}}'$  et pour ce polynôme  $f$  il existe un entier  $n$  tel que  $f^n \in \text{Int}_{D(k)}(A^m)$  donc  $f^n(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}'$  mais  $f^n(\underline{\beta}) \notin \widehat{\mathfrak{m}}'$ , d'où  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} \neq \mathfrak{M}_{\underline{\beta}}$  ■

Si  $A$  est unibranche et si en outre  $A'$  est un  $A$ -module de type fini (ou si de manière équivalente le complété  $\widehat{A}$  de  $A$  pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique est un anneau intègre [15, §4], [27, 32.2]), on dit que  $A$  est *analytiquement irréductible* ; dans ces conditions la topologie induite sur  $A$  par la topologie  $\mathfrak{m}'$ -adique coïncide avec la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique de  $A$  [11, prop.3.6] de sorte que la fermeture topologique  $\overline{A}$  de  $A$  dans  $\widehat{A}'$  n'est autre que le complété  $\widehat{A}$  lui-même, on en tire immédiatement le corollaire :

**COROLLAIRE 4.3 :** *Soit  $A$  un anneau noethérien local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de dimension 1, de corps résiduel fini et analytiquement irréductible ; alors, pour  $k < \infty$ , la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , est en bijection avec  $\widehat{A}^m$ , où  $\widehat{A}$  désigne le complété de  $A$  pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique : à tout point  $\underline{\alpha}$  de  $\widehat{A}^m$  correspond l'idéal premier  $\mathfrak{M}_{\underline{\alpha}} = \{f \in \text{Int}_{D(k)}(A^m) \mid f(\underline{\alpha}) \in \widehat{\mathfrak{m}}'\}$ .*

Si par contre l'anneau  $A$  (toujours noethérien, local, de dimension 1 et de corps résiduel fini) n'est pas unibranche, la fibre de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  est finie, comme pour les polynômes à valeurs entières à une indéterminée [10, th.1.1], [26, th.3.1] :

**THÉORÈME 4.4 :** *Soit  $A$  un anneau noethérien local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de dimension 1, de corps résiduel fini et non unibranche ; alors les idéaux premiers de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont en nombre fini et de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \{f \in \text{Int}_{D(k)}(A^m) \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}\}$ , où  $\underline{a} \in A^m$ .*

*Démonstration :* Il suffit de montrer qu'il existe un idéal  $\mathfrak{q}$  non nul de  $A$  tel que, si  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{q}}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , alors  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{b}}$  dans  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  [lemme 3.3].

La clôture intégrale  $A'$  de  $A$  est un anneau de Dedekind semi-local [27,33.2], on note  $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_r$  ses idéaux maximaux (où  $r \geq 2$ , puisque  $A$  n'est pas unibranche) et on note  $R$  une sous-algèbre finie de  $A'$  telle que les intersections  $\mathfrak{n}_j = \mathfrak{m}_j \cap R$  soient distinctes ; le produit  $\prod_{j=1}^r \mathfrak{n}_j$  est le radical de  $R$  et le conducteur  $[A : R]$  est non nul, il existe donc un entier  $s$  tel que  $\prod_{j=1}^r \mathfrak{n}_j^s \subset [A : R]$ , on veut montrer que l'on peut prendre pour idéal  $\mathfrak{q}$  l'un quelconque des idéaux  $\mathfrak{q}_j = \mathfrak{n}_j^s \cap A$  et donc en particulier (sans perte de généralité) l'idéal  $\mathfrak{q}_1$ .

Soient alors  $\underline{a} = (a_i) \in A^m$  et  $\underline{b} = (b_i) \in A^m$ , tels que  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{q}_1}$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , il nous faut établir que, pour  $g \in \text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , on a  $[g(\underline{a}) - g(\underline{b})] \in \mathfrak{m}$ .

Les localisés  $A'\mathfrak{m}_j$  sont les anneaux de valuations discrètes  $v_j$  du corps des fractions  $K$  de  $A$  et, pour chacune de ces valuations, il existe un entier  $\gamma_j$  tel que  $\underline{x} = (x_i) \in A^m$ ,  $\underline{y} = (y_i) \in A^m$ , et  $v_j(x_i - y_i) \geq \gamma_j$ ,  $1 \leq i \leq m$ , implique  $v_j[g(\underline{x}) - g(\underline{y})] \geq 1$  (en effet, on peut considérer  $g$  comme un fonction continue de  $A^m$  dans  $A$ , pour chacune des topologies induites par ces valuations). En vertu du théorème chinois dans l'anneau  $R$ , on peut choisir  $\underline{z} = (z_i) \in R^m$  tel que, pour  $1 \leq i \leq m$ , on ait

$$\begin{aligned} z_i &\equiv b_i \pmod{\mathfrak{n}_1^{\text{Sup}(s, \gamma_1)}}, \\ z_i &\equiv a_i \pmod{\mathfrak{n}_2^{\text{Sup}(s, \gamma_2)}}, \\ z_i &\equiv a_i \pmod{\mathfrak{n}_j^s}, \text{ pour } j = 3, \dots, r \text{ (si } r > 2). \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq i \leq m$ , on a  $(z_i - a_i) = (z_i - b_i) + (b_i - a_i)$  or  $(b_i - a_i) \in \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{n}_1^s$ , donc

$$\begin{aligned} z_i &\equiv a_i \pmod{\mathfrak{n}_1^s}, \text{ et finalement} \\ z_i &\equiv a_i \pmod{\prod_{j=1}^r \mathfrak{n}_j^s}, \text{ soit } z_1 \equiv a_i \pmod{[A : R]} \end{aligned}$$

Mais alors  $\underline{z} \in A^m$  et le choix de  $\underline{z}$  implique  $v_1[g(\underline{z}) - g(\underline{b})] \geq 1$  et  $v_2[g(\underline{z}) - g(\underline{a})] \geq 1$ , donc

$$[g(\underline{z}) - g(\underline{b})] \in \mathfrak{m}_1 \cap A = \mathfrak{m} \text{ et } [g(\underline{z}) - g(\underline{a})] \in \mathfrak{m}_2 \cap A = \mathfrak{m}, \text{ soit } [g(\underline{a}) - g(\underline{b})] \in \mathfrak{m} \blacksquare$$

*Remarques 4.5 :*

4.5.1 : On a des exemples, dans le cas de l'anneau des polynômes à valeurs entières à une indéterminée, qui montrent que le cardinal de la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  peut être supérieur à celui de  $(A/\mathfrak{m})^m$  [10, §2 et 3] : il resterait à déterminer, suivant l'anneau  $A$ , le "meilleur" idéal  $\mathfrak{q}$  pour lequel  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{q}}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , implique  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{b}}$ .

4.5.2 : Comme  $\text{Int}(A^m)$  est une extension radicale de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  (pour  $k$  fini) [proposition 2.4], il est clair qu'il existe une bijection entre les fibres au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de ces anneaux, celles-ci ont donc toujours même cardinal.

4.5.3 : Comme dans le cas unibranche,  $\text{Int}(A^m, A')$  est une extension entière de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  et les idéaux premiers de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  se relèvent dans  $\text{Int}(A^m, A')$  mais, contrairement au cas unibranche, comme  $\text{Int}(A^m, A')$  n'est pas ici une extension radicale de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , des idéaux distincts du type  $\mathfrak{M}_{\underline{a}}$  de  $\text{Int}(A^m, A')$  ont la même contraction dans  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ .

On termine ce paragraphe par l'étude de la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$ ; on commence par se débarrasser de la caractéristique  $p$  :

PROPOSITION 4.6 : *Soit  $A$  un anneau intègre de caractéristique  $p$ , alors les dérivées (partielles) d'ordre  $k_0 = m(p-1) + 1$  de tout polynôme à  $m$  indéterminées sont nulles, en particulier, si  $k \geq k_0$ , alors  $\text{Int}_{D(k)}(A^m) = \text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$ .*

*Démonstration* : C'est clair pour les dérivées d'ordre  $p$  des polynômes à une indéterminée et dans le cas général il suffit d'observer qu'une dérivée (partielle) d'ordre  $m(p-1)+1$  comprend nécessairement plus de  $p-1$  dérivations par rapport à l'une au moins des indéterminées (l'ordre des dérivations pouvant par ailleurs être interverti) ■

Si  $A$  est de caractéristique  $p$ , l'étude de la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  se ramène donc à celle de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ ; par contre, si  $A$  est de caractéristique 0, on montre que cette fibre est toujours finie, comme pour une indéterminée [7, th.6.1], [18, prop.5.3] et diffère donc de celle de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , dans le cas où  $A$  est unibranche :

THÉORÈME 4.7 : *Soit  $A$  un anneau noethérien local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de dimension 1, de caractéristique 0 et de corps résiduel fini; alors les idéaux premiers de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont en nombre fini et de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \{f \in \text{Int}_{D(\infty)}(A^m) \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}\}$ , où  $\underline{a} \in A^m$ .*

*Démonstration* : La caractéristique  $p$  de  $A/\mathfrak{m}$  est un élément non nul de  $A$ , il existe donc un entier  $r$  tel que  $\mathfrak{m}^{r(p-1)} \subset pA$ ; nous allons montrer que, pour tout  $f \in \text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$ , si  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{m}^r}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , on a  $[f(\underline{a}) - f(\underline{b})] \in \mathfrak{m}$  [lemme 3.3] et pour cela, en raisonnant de proche en proche, établir que  $[f(\underline{a}) - f(\underline{a}')] \in \mathfrak{m}$ , où  $\underline{a}' = (b_1, a_2, \dots, a_m)$ .

Si on pose  $h = (b_1 - a_1)$ , alors  $h \in \mathfrak{m}^r$  et, ou bien  $h = 0$  et le résultat est clair (puisque alors  $\underline{a} = \underline{a}'$ ), ou bien

$$\Delta_h^1 f(\underline{a}) = \frac{f(\underline{a}') - f(\underline{a})}{h} = \sum_{n \geq 1} \frac{h^{n-1}}{n!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial X_1^n}(\underline{a})$$

or  $\frac{\partial^n f}{\partial X_1^n}(\underline{a})$  est dans  $A$ , puisque  $f \in \text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$ , et  $h^{n-1} \in \mathfrak{m}^{r(n-1)} \subset p^k A$ , où  $k$  désigne

la partie entière de  $\frac{n-1}{p-1}$ , comme par ailleurs il est classique que la plus grande puissance de

$p$  qui divise  $n!$  est inférieure à  $k$  alors  $\frac{h^{n-1}}{n!}$  est également dans  $A$ ; finalement  $\Delta_h^1 f(\underline{a}) \in A$ ,

donc  $[f(\underline{a}') - f(\underline{a})] = h \Delta_h^1 f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}$  ■

*Remarque 4.8* : Comme dans le cas d'une indéterminée, le cardinal de la fibre de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  dépend de l'entier  $r$  tel que  $\mathfrak{m}^{r(p-1)} \subset pA$  [7,th.6.1] [20, §14].

## §5 - Couples d'anneaux partageant un idéal pseudo-principal

On considère des couples d'anneaux  $A \subset B$ , partageant un idéal  $\mathfrak{m}$  ; pour cela on se donne un anneau  $B$ , un idéal  $\mathfrak{m}$  de  $B$  et un sous-anneau  $D$  du quotient  $B/\mathfrak{m}$ , on définit alors  $A$  comme étant le sous-anneau de  $B$  formé des éléments dont la classe modulo  $\mathfrak{m}$  est dans  $D$  [8, introduction] ; on se restreint au cas où  $D = k$  est un corps fini, de sorte que  $\mathfrak{m}$  est maximal dans  $A$  et de corps résiduel fini (afin que la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_*(A^m)$  ne soit pas triviale) ; si en particulier  $B$  est un anneau de valuation d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  on dit que  $A$  est un *anneau de pseudo-valuation* et que  $B$  est *l'anneau de valuation associé* [24],[25] ; dans ce paragraphe on considère le cas où  $\mathfrak{m}$  est pseudo-principal, on commence donc par donner une condition générale pour qu'il en soit ainsi :

**LEMME 5.1** : *Soit  $A \subset B$  un couple d'anneaux, partageant un idéal  $\mathfrak{m}$  ; alors  $\mathfrak{m}$  est pseudo-principal dans  $A$  si et seulement si il l'est dans  $B$ .*

*Démonstration* : Si  $\mathfrak{m}^s \subset A\pi$ , où  $\pi \in \mathfrak{m}$ , alors  $\mathfrak{m}^s \subset B\pi$ , inversement si  $\mathfrak{m}^s \subset B\pi$ , alors  $\mathfrak{m}^{s+1} \subset \mathfrak{m}\pi \subset A\pi$  ■

Si en particulier  $A$  est un anneau de pseudo-valuation on voit que  $\mathfrak{m}$  est pseudo-principal si et seulement si il est principal dans l'anneau de valuation associé  $B$ .

On dit qu'un idéal premier  $\mathfrak{p}$  d'un anneau  $A$  est *divisé* si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ , donc si  $\mathfrak{p}$  est un idéal commun à  $A$  et à  $A_{\mathfrak{p}}$ , c'est par exemple le cas de tout idéal premier d'un anneau de valuation ; on peut alors "réduire" la dimension de  $A$ , en se ramenant au quotient  $A/\mathfrak{p}$  :

**PROPOSITION 5.2** : *Si l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  contient strictement un idéal premier divisé  $\mathfrak{p}$ , alors la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_*(A^m)$  est en bijection, respectant l'inclusion, avec la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$  de  $\text{Int}_*((A/\mathfrak{p})^m)$ .*

*Démonstration* : En effet  $\mathfrak{p}$  est de corps résiduel infini donc  $\text{Int}_*(A^m)$  est inclus dans  $A_{\mathfrak{p}}[X]$  [propositions 1.6, 1.7] ; la surjection canonique qui à tout  $f \in A_{\mathfrak{p}}[X]$  associe le polynôme  $\bar{f} \in A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]$  (obtenu en prenant la classe de ses coefficients modulo  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ ) induit une surjection  $\sigma : \text{Int}_*(A^m) \rightarrow \text{Int}_*((A/\mathfrak{p})^m)$  [14, lemme 2.1], en effet, si  $\bar{f} \in \text{Int}_*((A/\mathfrak{p})^m)$  et

$\underline{a} \in A^m$ , alors  $\overline{f}(\underline{a}) \in A/\mathfrak{p}$  soit  $f(\underline{a}) \in (A + \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \subset A$ , puisque  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ , et  $f$  est à valeurs entières sur  $A$ , il en est de même de ses dérivées ou différences finies divisées, d'où finalement  $f \in \text{Int}_*(A^m)$ ; il reste à montrer qu'un idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  contient le noyau de  $\sigma$ , or ce noyau est formé des polynômes à coefficients dans  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{P}$  contient  $\mathfrak{m}$  donc a fortiori les polynômes à coefficients dans  $\mathfrak{p}$  ■

Si, dans les conditions de la proposition ci-dessus,  $A/\mathfrak{p}$  est noethérien de dimension 1, on peut alors appliquer les résultats des deux paragraphes précédents. Le lemme suivant permet de donner des exemples pour les couples d'anneaux :

LEMME 5.3 : Soit  $A \subset B$  un couple d'anneaux partageant un idéal pseudo-principal  $\mathfrak{m}$ ; notant  $\mathfrak{p}$  l'intersection  $\mathfrak{p} = \bigcap_n \mathfrak{m}^n$ , on a alors

- i)  $\mathfrak{p}$  est un idéal commun à  $A$  et  $B$ , distinct de  $\mathfrak{m}$ ,
- ii)  $\mathfrak{p}$  est un idéal divisé de  $A$  si et seulement si c'est un idéal divisé de  $B$ ,
- iii) si  $B/\mathfrak{m}$  est fini et  $B/\mathfrak{p}$  est noethérien alors  $A/\mathfrak{p}$  est noethérien.

Démonstration : i) Il est clair que  $\mathfrak{p}$  est commun à  $A$  et  $B$ ; en outre comme  $\mathfrak{m}$  est pseudo-principal, alors  $\mathfrak{m}^s \subset A\pi$ , où  $\pi \in \mathfrak{m}$ , d'où  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^{2s} \subset A\pi^2 \subset A\pi \subset \mathfrak{m}$ , on tire  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$  (sinon  $A\pi^2 = A\pi$ , soit  $\pi = u\pi^2$ , où  $u \in A$ , mais alors  $u\pi = 1$  et  $\pi$  serait inversible).

ii) On a  $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$  [8, prop.0] donc  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  si et seulement si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ .

iii) Les anneaux  $A/\mathfrak{p}$  et  $B/\mathfrak{p}$  partagent l'idéal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ ; comme  $B/\mathfrak{m}$  est fini, c'est a fortiori un  $A/\mathfrak{m}$ -module de type fini et, comme  $B/\mathfrak{p}$  est noethérien, alors  $A/\mathfrak{p}$  est noethérien [8, prop. 1, cor.1] ■

En particulier, si  $A$  est un anneau de pseudo-valuation dont l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  est principal et de corps résiduel fini dans l'anneau de valuation  $B$  associé, alors  $B/\mathfrak{p}$  est un anneau de valuation discrète donc  $A/\mathfrak{p}$  est local, noethérien et de dimension 1 (on dit alors que  $A$  est un anneau de pseudo-valuation *pseudo-noethérien* [13], [14]); de la proposition 5.2 et du corollaire 4.3 on tire alors, de manière analogue au cas d'une indéterminée [14, th.2.2] :

THÉORÈME 5.4 : Soit  $A$  un anneau de pseudo-valuation dont l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  est principal dans l'anneau de valuation  $B$  associé et de corps résiduel  $B/\mathfrak{m}$  fini; notant  $\mathfrak{p}$  l'intersection  $\mathfrak{p} = \bigcap_n \mathfrak{m}^s$ , on a alors

- i) la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$ , pour  $k \geq 1$ , est en bijection avec  $(A/\mathfrak{m})^m$ ,
- ii) la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$ , pour  $k < \infty$ , est en bijection avec  $(\widehat{A/\mathfrak{p}})^m$  où  $\widehat{A/\mathfrak{p}}$  désigne le complété de  $A/\mathfrak{p}$  pour la topologie  $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ -adique,

iii) si  $A$  est de caractéristique 0, la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(\infty)}(A^m)$  est finie.

*Démonstration* : (i) résulte immédiatement du théorème 3.5,

(ii) résulte de la proposition 5.2 et du corollaire 4.3, en effet  $B/\mathfrak{p}$  est un anneau de valuation discrète, et un  $A/\mathfrak{p}$ -module de type fini car  $B/\mathfrak{m}$  est une extension finie de  $A/\mathfrak{m}$  [8, §1 lemme 1],  $B/\mathfrak{p}$  est donc la clôture intégrale de  $A/\mathfrak{p}$  et  $A/\mathfrak{p}$  est analytiquement irréductible,

(iii) résulte du théorème 4.7 ■

Le théorème s'applique au cas où  $A$  lui-même est un anneau de valuation d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  principal et de corps résiduel fini (soit  $A = B$ ).

Sans se restreindre au cas où  $B$  est un anneau de valuation, mais toujours dans le cas où  $\mathfrak{m}$  est pseudo-principal, on suppose maintenant que  $B/\mathfrak{m}$  est de cardinal infini, et que  $\text{Int}(B^m) \subset B[\underline{X}]$  (c'est notamment le cas si  $B$  est local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ); on montre alors que la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_{D(k)}(A^m)$  est finie (comme l'est toujours celle de  $\text{Int}_{\Delta(k)}(A^m)$  pour un idéal pseudo-principal [théorème 3.5]), on généralise ainsi un résultat établi par les auteurs pour une indéterminée dans le cas d'un anneau de pseudo-valuation [14, §3] :

**THÉORÈME 5.5** : Soit  $A \subset B$  un couple d'anneaux, partageant un idéal pseudo-principal  $\mathfrak{m}$ , tel que  $B/\mathfrak{m}$  est infini,  $A/\mathfrak{m}$  est fini et  $\text{Int}(B^m) \subset B[\underline{X}]$ ; alors les idéaux premiers de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont de la forme  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \{f \in \text{Int}_*(A^m) \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}\}$  et en bijection avec  $(A/\mathfrak{m})^m$ .

*Démonstration* : Il suffit d'établir que si  $a_i \equiv b_i \pmod{\mathfrak{m}}$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , alors  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \mathfrak{M}_{\underline{b}}$  dans  $\text{Int}_*(A^m)$ , [lemme 3.3] et pour cela, en raisonnant de proche en proche, que si  $f \in \text{Int}_*(A^m)$ ,  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ,  $\underline{a}' = (b_1, a_2, \dots, a_m)$  et  $(b_1 - a_1) \in \mathfrak{m}$ , alors  $[f(\underline{a}') - f(\underline{a})] \in \mathfrak{m}$ .

On pose  $h = (b_1 - a_1)$  et  $g(X_1) = f(a_1 + hX_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ; pour tout  $x \in B$ , on a  $(a_1 + hx) \in A$  (car  $hx \in \mathfrak{m}$ ), donc  $g(x) \in A$  (puisque  $f \in \text{Int}(A^m)$ ), ainsi  $g$  est un polynôme, à une indéterminée  $X_1$ , qui prend sur  $B$  ses valeurs dans  $A$  et a fortiori dans  $B$ , donc  $g \in B[X_1]$ ; la classe  $\bar{g}$  de  $g$  dans  $(B/\mathfrak{m})[X_1]$  ne prend sur  $B/\mathfrak{m}$  qu'un nombre fini de valeurs, toutes dans  $k = A/\mathfrak{m}$  (puisque  $g$  prend sur  $B$  ses valeurs dans  $A$ ) tandis que  $B/\mathfrak{m}$  est de cardinal infini, on en conclut que  $\bar{g}$  est un polynôme constant, et même nul (puisque évidemment  $g(0) = 0$ ) et donc que  $g \in \mathfrak{m}[X_1]$ , on tire donc

$$[f(\underline{a}') - f(\underline{a})] = f(a_1 + h, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) = g(1) \in \mathfrak{m} \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.6* : Dans les conditions du théorème, si  $B$  est un anneau de valuation, alors l'intersection  $\mathfrak{p} = \bigcap_n \mathfrak{m}^n$  est un idéal commun à  $A$  et  $B$ , distinct de  $\mathfrak{m}$  et c'est un idéal premier divisé [lemme 5.3] mais, contrairement au cas où  $B/\mathfrak{m}$  est fini,  $A/\mathfrak{p}$  n'est pas noethérien (en effet,  $B/\mathfrak{m}$  n'est pas un  $A/\mathfrak{m}$ -module de type fini [8, prop.1, cor.1]) ; on peut néanmoins réduire la dimension de  $A$  [proposition 5.2], on en tire que la fibre de  $\text{Int}_*((A/\mathfrak{p})^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$  est en bijection avec  $A/\mathfrak{m}$  (on peut d'ailleurs noter que le couple  $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{p}$  vérifie les hypothèses du théorème).

## §6 - Inclusion dans un anneau de polynômes

Pour finir on considère le cas où il existe un suranneau  $B$  de  $A$  tel que  $\text{Int}(A^m) \subset B[\underline{X}]$  (donc  $\text{Int}_*(A^m) \subset B[\underline{X}]$ ) ; une condition nécessaire est qu'il n'existe aucun idéal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  se relevant dans  $B$  qui soit à la fois pseudo-principal et de corps résiduel fini (sinon  $\mathfrak{m}^s \subset A\pi$ , où  $\pi \in \mathfrak{m}$  et, notant  $q$  le cardinal de  $A/\mathfrak{m}$ , le polynôme  $\frac{(X_1^q - X_1)^s}{\pi}$  est dans  $\text{Int}(A^m)$  mais n'est pas dans  $B[\underline{X}]$ ). On a alors :

**PROPOSITION 6.1** : *S'il existe un suranneau  $B$  de  $A$  tel que  $\text{Int}_*(A^m) \subset B[\underline{X}]$  alors, pour tout idéal premier  $\mathfrak{m}$  de  $A$  qui se relève dans  $B$ , la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_*(A^m)$  est de dimension au moins  $m$ .*

*Démonstration* : Si  $\mathfrak{m}'$  relève  $\mathfrak{m}$  dans  $B$ , alors la chaîne

$$\mathfrak{m}'[\underline{X}] \subset (\mathfrak{m}', X_1) \subset \dots \subset (\mathfrak{m}', X_1, \dots, X_m)$$

découpe dans  $\text{Int}_*(A^m)$  une chaîne d'idéaux premiers au-dessus de  $\mathfrak{m}$  et de longueur  $m$  ■

*Remarques 6.2* :

6.2.1 : Si  $\mathfrak{m}$  est de cardinal infini, alors  $\text{Int}_*(A^m)_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}[\underline{X}]$  [proposition 1.6] et la fibre de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  est de dimension  $m$ .

6.2.2 : La fibre de  $\text{Int}_*(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  peut être de dimension arbitraire supérieure à  $m$ , comme le montre déjà le cas d'une indéterminée [14, exemple 4.5].

6.2.3 : La proposition s'applique à un anneau noethérien  $A$  tel que les idéaux premiers de hauteur 1 de sa clôture intégrale  $A'$  soient de corps résiduel infini, on a alors en effet  $\text{Int}_*(A^m) \subset A'[\underline{X}]$  [26, cor.4.4].

On donne maintenant deux conditions suffisantes pour avoir l'inclusion  $\text{Int}_*(A^m) \subset B[\underline{X}]$ ; la première s'applique aux anneaux de pseudo-valuation et généralise le cas d'une indéterminée [14, prop.1.2] :

**PROPOSITION 6.3 :** *Soit  $A$  un anneau de pseudo-valuation dont l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  n'est pas principal dans l'anneau de valuation associé  $B$ ; on a alors l'inclusion  $\text{Int}_*(A^m) \subset B[\underline{X}]$ .*

*Démonstration :* Il suffit bien sûr de montrer que  $\text{Int}(A^m) \subset B[\underline{X}]$ ; pour cela on montre, par récurrence sur  $m$ , qu'un polynôme qui prend sur  $(A)^m$  ses valeurs dans  $B$  est à coefficients dans  $B$  :

- Pour  $m = 1$ , on reprend la démonstration de [14, prop.1.2] : on note  $v$  la valuation associée à l'anneau  $B$  et on observe d'abord que l'ensemble des éléments positifs de son groupe des valeurs n'est pas borné inférieurement (puisque  $\mathfrak{m}$  n'est pas principal). Soit donc  $f = \sum_i a_i X^i$ , un polynôme (à une indéterminée) qui prend sur  $A$  ses valeurs dans  $B$ ; on note  $a_j$  le premier coefficient (dans l'ordre croissant des degrés) tel que  $v(a_j)$  soit minimal;

si  $i < j$ , alors  $v(a_i) > v(a_j)$  et, pour  $x \in \mathfrak{m}$  de valuation petite, on a  $v(a_i x^i) > v(a_j x^j)$ ;

si  $i > j$ , alors  $v(a_i) \geq v(a_j)$  et donc, pour tout  $x \in \mathfrak{m}$  on a  $v(a_i x^i) > v(a_j x^j)$ ;

pour tout  $x \in \mathfrak{m}$  de valuation petite, on a donc  $0 \leq v(f(x)) = v(a_j x^j) = v(a_j) + jv(x)$ , puisque  $f$  prend sur  $A$  (et a fortiori sur  $\mathfrak{m}$ ) ses valeurs dans  $B$ , d'où  $v(a_j) \geq 0$ , puisque  $v(x)$  peut être choisi arbitrairement petit, et en conclusion  $f \in B[X]$ .

- Supposant le résultat vrai pour  $m - 1$ , on considère un polynôme  $f$  qui prend sur  $(A)^m$  ses valeurs dans  $B$  et qu'on écrit, ordonné suivant  $X_m$ , sous la forme  $f = \sum_i f_i X_m^i$ , où, pour tout  $i$ ,  $f_i \in K[X_1, \dots, X_{m-1}]$ ; pour tout  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in A^{m-1}$ , le polynôme  $f_{\underline{x}} = \sum_i f_i(\underline{x}) X_m^i$  en la seule indéterminée  $X_m$  prend sur  $A$  ses valeurs dans  $B$ , donc ses coefficients sont dans  $B$ , c'est dire que, pour tout  $i$ ,  $f_i$  prend sur  $(A)^{m-1}$  ses valeurs dans  $B$  donc  $f_i \in B[X_1, \dots, X_{m-1}]$ , par hypothèse de récurrence ■

La seconde condition généralise encore le cas d'une indéterminée [9, prop.3.2], elle est à rapprocher du corollaire 1.8 :

**PROPOSITION 6.4 :** *Soit  $A \subset B$  un couple d'anneaux, partageant un idéal  $\mathfrak{m}$ ; s'il existe une famille  $\mathcal{F}$  de premiers de  $B$ , ne contenant pas  $\mathfrak{m}$ , de corps résiduels infinis et tels que  $B = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{F}} B_{\mathfrak{q}}$ ; alors  $\text{Int}_*(A^m) \subset B[\underline{X}]$ .*

*Démonstration* : Il suffit bien sûr de montrer  $\text{Int}_*(A^m) \subset B[\underline{X}]$  : si  $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ , alors  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$  ne contient pas  $\mathfrak{m}$ , donc  $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{q}}$  [8, prop.0], d'où

et 
$$\text{Int}(A^m) \subset \text{Int}(A_{\mathfrak{p}}^m) = \text{Int}(B_{\mathfrak{q}}^m) = B_{\mathfrak{q}}[\underline{X}] \quad [\text{propositions 1.6 et 1.7}],$$

$$\text{Int}(A^m) \subset \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{F}} B_{\mathfrak{q}}[\underline{X}] = B[\underline{X}] \quad \blacksquare$$

Pour finir on détermine complètement la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}(A^m)$ , lorsque le couple  $A \subset B$  partage un idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de corps résiduel fini dans  $A$ , et que  $\text{Int}(A^m) \subset B[\underline{X}]$  : on englobe ainsi le cas où  $A$  est un anneau de pseudo-valuation d'idéal maximal non pseudo-principal [proposition 6.3], et on généralise le cas d'une indéterminée [14, th.4.5] :

**THÉORÈME 6.5** : *Soit  $A \subset B$  un couple d'anneaux partageant un idéal  $\mathfrak{m}$  et tel que  $\text{Int}(A^m) \subset B[\underline{X}]$  ; si  $\mathfrak{m}$  est maximal dans  $A$  et  $B$  et de corps résiduel fini dans  $A$  alors la fibre de  $\text{Int}(A^m)$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  est en bijection, respectant l'inclusion, avec celle de  $B[\underline{X}]$ .*

*Démonstration* : - D'abord le couple  $\text{Int}(A^m) \subset B[\underline{X}]$  partage l'idéal  $\mathcal{J}$  des polynômes à valeurs dans  $\mathfrak{m}$ , soit  $\mathcal{J} = \{f \in B[\underline{X}] \mid f(A^m) \subset \mathfrak{m}\}$  : en effet, si  $f \in B[\underline{X}]$  et  $g \in \mathcal{J}$ , alors, pour tout  $\underline{a} \in A^m$ ,  $f(\underline{a})g(\underline{a}) \in B\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ , ainsi  $\mathcal{J}$  est un idéal de  $B[\underline{X}]$  et d'autre part un polynôme à valeurs dans  $\mathfrak{m}$  est a fortiori à valeurs dans  $A$ , donc  $\mathcal{J}$  est contenu dans  $\text{Int}(A^m)$  ;  
- ensuite les idéaux premiers de  $B[\underline{X}]$  contenant  $\mathcal{J}$  sont en bijection avec  $(A/\mathfrak{m})^m$  et de la forme

$$\mathfrak{M}'_{\underline{a}} = \{f \in B[\underline{X}] \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}\} = (\mathfrak{m}, X_1 - a_1, \dots, X_m - a_m) ;$$

soit en effet  $\Pi$  le produit des idéaux de la forme  $\mathfrak{M}'_{\underline{a}}$ , où les composantes de  $\underline{a}$  parcourent un système de représentants modulo  $\mathfrak{m}$  dans  $A$  ; si  $f \in \Pi$ , alors  $f$  est dans  $\mathcal{J}$ , en effet, pour tout  $\underline{x} \in A^m$ , il existe un idéal  $\mathfrak{M}'_{\underline{a}}$ , facteur de  $\Pi$ , tel que  $a_i \equiv x_i \pmod{\mathfrak{m}}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , donc  $f(\underline{x}) - f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}$  (car  $f$  est à coefficients dans  $B$ ) soit  $f(\underline{x}) \in \mathfrak{m}$ , ainsi  $\Pi$  est inclus dans  $\mathcal{J}$  et a fortiori dans tout premier  $\mathfrak{P}$  de  $B[\underline{X}]$  qui contient  $\mathcal{J}$ . En conclusion l'un des facteurs  $\mathfrak{M}'_{\underline{a}}$  de  $\Pi$  est inclus dans  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{M}'_{\underline{a}} = \mathfrak{P}$ , car  $\mathfrak{M}'_{\underline{a}}$  est maximal dans  $B[\underline{X}]$  (puisque  $\mathfrak{m}$  est maximal dans  $B$ ) ;

- enfin les intersections des idéaux premiers de  $B[\underline{X}]$  contenant  $\mathcal{J}$  avec  $\text{Int}(A^m)$  sont les idéaux  $\mathfrak{M}_{\underline{a}} = \{f \in \text{Int}(A^m) \mid f(\underline{a}) \in \mathfrak{m}\}$  et elles sont toutes distinctes [remarque 3.4], le théorème est donc une application immédiate des résultats sur les couples d'anneaux partageant un idéal [8, §2]  $\blacksquare$

*Remarques 6.7 :*

6.7.1 : Un polynôme à coefficients dans  $B$  peut être à valeurs dans  $\mathfrak{m}$  sur  $A^m$  sans que ses dérivées ou ses différences finies divisées ne soient à valeurs dans  $A$  (si  $b \in B$  mais  $b \notin A$ , on peut considérer par exemple le polynôme  $b \prod_j (X_1 - u_j)$ , où les  $u_j$  forment un système de représentants modulo  $\mathfrak{m}$ ), ainsi  $\text{Int}_*(A^m)$  ne partage pas en général l'idéal  $\mathcal{J}$  avec  $B[\underline{X}]$ , il resterait donc à déterminer, dans les conditions du théorème 6.6, la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $\text{Int}_*(A^m)$ .

6.7.2 Les théorèmes 5.4, 5.5 et 6.5 permettent de couvrir tous les cas possibles pour un anneau de pseudo-valuation.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARSKY D. : Fonctions  $k$  lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières. *Bull. Soc. Math. France* **101**, 397-41 (1973).
- [2] BOURBAKI N. : *Algèbre Commutative*. Hermann, Paris (1961/1965).
- [3] BRIZOLIS D. : Hilbert rings of integral valued polynomials. *Comm. in Algebra* **3**, 1051-1081 (1975).
- [4] BRIZOLIS D. : Ideals in rings of integer valued polynomials. *J. Reine Angew. Math.* **285**, 28-52 (1976).
- [5] BRIZOLIS D. : A theorem on ideals in Prüfer rings of integral-valued polynomials. *Comm. in Algebra* **7**, 1065-1077 (1979).
- [6] CAHEN P-J. : Polynômes à valeurs entières. *Thèse Université Paris XI, Orsay* (1973).
- [7] CAHEN P-J. : Polynômes et dérivées à valeurs entières. *Ann. Sci. Clermont* **10**, 25-43 (1975).
- [8] CAHEN P-J. Couples d'anneaux partageant un idéal. *Archiv der Mathematik* **51**, 505-514 (1988).
- [9] CAHEN P-J. : Dimension de l'anneau des polynômes à valeurs entières. *Manuscripta Math.* **67**, 333-343 (1990).
- [10] CAHEN P-J. : Polynômes à valeurs entières sur un anneau non analytiquement irréductible. *J. Reine Angew. Math.* **418**, 131-137 (1991).
- [11] CAHEN P-J. : Integer-valued polynomials on a subset. A paraître *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [12] CAHEN P-J. et CHABERT J-L. : Coefficients et valeurs d'un polynôme. *Bull. Sci. Math., 2<sup>ème</sup> série* **95**, 295-304 (1971).
- [13] CAHEN P-J. et HAOUAT Y. : Polynômes, dérivées et différences finies divisées à valeurs entières sur un anneau de pseudo-valuation. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **306**, 581-584 (1988).
- [14] CAHEN P-J. et HAOUAT Y. : Polynômes à valeurs entières sur un anneau de pseudo-valuation, *Manuscripta Math* **61**, 23-31 (1988).
- [15] CAHEN P-J., GRAZINNI F. et HAOUAT Y. : Intégrité du complété et théorème de Stone-Weierstrass. *Ann. Sci. Clermont* **21**, 47-58 (1982).
- [16] CHABERT J-L. : Anneaux des polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou. *Bull. Soc. Math. France* **99**, 273-283 (1971).
- [17] CHABERT J-L. : Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières. *J. Reine Angew. Math.* **293/294**, 275-283 (1977).

- [18] CHABERT J-L. : Polynômes à valeurs entières ainsi que leurs dérivés. *Ann. Sci. Clermont* **18**, 47-64 (1979).
- [19] CHABERT J-L. : Anneaux de Skolem. *Arkiv der Mathematik* **32**, 555-568 (1979).
- [20] CHABERT J-L. : Dérivées et différences finies à valeurs entières. A paraître.
- [21] CHABERT J-L. et GERBOUD G. : Polynômes à valeurs entières et binômes de Fermat. A paraître *Canad J. of Math.*.
- [22] HOUAT Y. et GRAZZINI F. : Polynômes et différences finies divisées. *CRAS*, **284 I**, 1171-1173 (1977).
- [23] HOUAT Y. et GRAZZINI F. : Polynômes de Barsky. *Ann. Sci. Univ. Clermont II* **18**, 65-81 (1979).
- [24] HEDSTOM J.R. and HOUSTON E.G. : Pseudo valuation domains. *Pacific J. of Math.***75**, 137-147 (1978).
- [25] HEDSTOM J.R. and HOUSTON E.G. : Pseudo valuation domains II. *Houston J. of Math.***4**, 199-207 (1978).
- [26] GILMER R., HEINZER W., LANTZ D. : The Noetherian Property of Rings of Integer-Valued Polynomials. To appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*.
- [27] NAGATA M. : *Local Rings*. Interscience, New-York/London/Sydney (1962).

CAHEN Paul-Jean  
 Département de Mathématiques - Case 322  
 Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme  
 13397 Marseille Cedex 13  
 email CAHEN at FRMOP11

et

HAOUAT Youssef  
 Département de Mathématiques  
 Faculté des Sciences et Techniques de Tunis  
 1060 Belvédère TUNIS