ANNEAUX NOETHÉRIENS DE HILBERT

AHMED AYACHE ET PAUL-JEAN CAHEN

Abstract. Soit D un anneau intègre noethérien. On étudie le radical hilbertien de D (ensemble des éléments f tels que D_f est un anneau de Hilbert) et on donne des conditions pour que D soit un anneau de Hilbert, en relation avec son radical dimensionnel. Enfin, on caractérise les anneaux de Hilbert par diverses conditions de chaîne. On montre en particulier que D est un anneau de Hilbert si et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $D[X]$, de trace $\mathfrak{p}$ dans D, la cohauteur de $\mathfrak{p}$ dans D est majorée par celle de $\mathfrak{P}$ dans $D[X]$.

Introduction

Tous les anneaux considérés ici sont commutatifs, unitaires, et de dimension de Krull finie, le plus souvent intègres. Cet article est consacré à l'étude des anneaux de Hilbert noethériens. Rappelons qu'un anneau D est dit de *Hilbert* (ou de *Jacobson*) si tout idéal premier de D est l'intersection d'idéaux maximaux ou, de manière équivalente, si la trace de tout idéal maximal de l'anneau de polynômes $D[X]$ est un idéal maximal de D (on renvoie à [5] et [10] pour les définitions et résultats classiques d'algèbre commutative). On en donne ici de nouvelles caractérisations en terme de radical dimensionnel ou de certaines conditions de chaîne.

Faisons tout d'abord quelques rappels et fixons quelques notations. On note $\dim(D)$ la *dimension de Krull* de D, soit le majorant des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de D. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, la *hauteur* de $\mathfrak{p}$, notée $\mathrm{ht}_D\mathfrak{p}$, est la dimension du localisé $D_\mathfrak{p}$ (longueur maximale des chaînes dont le plus grand élément est $\mathfrak{p}$), la *cohauteur* de $\mathfrak{p}$ est la dimension du quotient $D/\mathfrak{p}$ (longueur maximale des chaînes dont le plus petit élément est $\mathfrak{p}$). On dit que D est *coéquidimensionnel* si tous les idéaux maximaux de D ont même hauteur (égale à $\dim(D)$). Le *radical dimensionnel* de D, noté $\mathrm{Rd}(D)$ est l'intersection des idéaux maximaux de hauteur maximale de D.

Pour tout entier n, on note $D[n]$ l'anneau de polynômes en n indéterminées sur D et $\mathfrak{a}[n]$ l'étendu d'un idéal $\mathfrak{a}$ de D. On dit que D est un anneau de *Jaffard* si $\dim(D)[n] = \dim(D) + n$ pour tout entier n [1], et qu'il est *localement de Jaffard* si le localisé $D_\mathfrak{p}$ en tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de D est de Jaffard (soit $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}[n] = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, pour tout n et pour tout $\mathfrak{p}$). Rappelons qu'un anneau noethérien est de Jaffard et même localement de Jaffard (puisque tout localisé est encore noethérien).

Dans un premier paragraphe on complète et on améliore certains résultats de [2] et [7] sur les anneaux de radical dimensionnel nul. Pour un anneau (intègre) de Jaffard D, on montre que $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ si et seulement si, pour toute extension (intègre) de type fini R de D, tout idéal premier de R au-dessus de (0) est

Date: November 27, 2005.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 13G05, 13F05, 13F20; Secondary: 13B24, 13C05, 13B22, 13B30, 13F30.

Key words and phrases. Anneaux de Hilbert, radical dimensionnel.

l'intersection d'idéaux maximaux de hauteur maximale dans R. Dans le cas où D est localement de Jaffard, on montre même que $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ si et seulement si $\mathrm{Rd}(D[X]) = (0)$ (ou encore tout idéal premier $\mathfrak{Q}$ de $D[X]$ tel que $(0) = \mathfrak{Q} \cap D$ est l'intersection d'idéaux maximaux de hauteur maximale dans $D[X]$). Tout ceci s'applique bien sûr au cas où D est (intègre) noethérien, pour lequel on montre encore que $f \in \mathrm{Rd}(D)$ si et seulement si $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$.

Au deuxième paragraphe on caractérise les anneaux de Hilbert noethériens, intègres ou non, comme les anneaux pour lesquels le radical dimensionnel $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p})$ est nul, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$. On caractérise alors les anneaux intègres et noethériens qui sont de Hilbert et coéquidimensionnels par la condition $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ et, pour tout $f \neq 0, D_f$ est coéquidimensionnel.

Au troisième paragraphe, on définit le radical hilbertien $H(D)$, d'un anneau intègre noethérien D, comme étant la réunion de 0 et de l'ensemble des éléments $f \neq 0$ de D tels que D_f est un anneau de Hilbert. On vérifie qu'il s'agit bien d'un idéal radical de D. Le cas d'un anneau noethérien de dimension 1 est trivial : ou bien D est un anneau de Hilbert, et alors $H(D) = D$, ou bien D est semi-local et $H(D)$ est égal au radical dimensionnel $\mathrm{Rd}(D)$ (alors égal au radical de Jacobson de D). Pour un anneau de dimension $n \geq 2$, on introduit aussi l'intersection $\mu(D)$ des idéaux maximaux de hauteur $h \geq 2$. On montre d'une part que $\mu(D) \subseteq H(D)$ et d'autre part que $H(D) \subseteq \mathrm{Rd}(D)$ dès lors que D n'est pas un anneau de Hilbert. On donne des exemples où $H(D)$ est égal à l'un ou l'autre des ces radicaux, ou bien encore distinct de chacun d'eux. On établit enfin que, pour tout entier n, le radical hilbertien $H(D[n])$ de l'anneau de polynômes $D[n]$ est l'étendu $H(D)[n]$.

Au dernier paragraphe on caractérise les anneaux de Hilbert (noethériens) par une formule qui, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $D[n]$ relie la hauteur de $\mathfrak{P}$ à celle de sa trace $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$ ou encore par la condition que la cohauteur de $\mathfrak{p}$ (dans D) est majorée par celle de $\mathfrak{P}$ (dans $D[n]$). Rappelons qu'on dit qu'un anneau D est *taut-level* si par tout idéal premier il passe une chaîne de longueur maximale (a fortiori une telle chaîne passe par tout idéal maximal et D est alors coéquidimensionnel). On montre qu'un anneau noethérien D est de Hilbert et coéquidimensionnel (resp. de Hilbert et taut-level) si et seulement si, pour tout $n, D[n]$ est coéquidimensionnel (resp. taut-level). Rappelons aussi qu'on dit qu'un anneau D est *caténaire* si toutes les chaînes saturées de premiers entre deux idéaux premiers $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ont même longueur et que D est *universellement caténaire* si, pour tout $n, D[n]$ est caténaire. Dans le cas où D est universellement caténaire on généralise alors les formules précédentes (sur les hauteurs) aux extensions de type fini de D.

Rappelons pour finir quelques définitions dont on fait aussi usage dans cet article. Pour une extension $D \subseteq R$ d'anneaux intègres, on note d.t.$[R : D]$ le degré de transcendance du corps des fractions de R sur celui de D ; lorsque R est contenu dans le corps des fractions de D, on dit que R est un *suranneau* de D. On dit que l'extension $D \subseteq R$ *vérifie la formule de la dimension* si, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de R, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$, on a

$$\mathrm{ht}_R(\mathfrak{q}) + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : D/\mathfrak{p}] = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + \mathrm{d.t.}[R : D].$$

Rappelons enfin que toute extension de type fini d'un anneau (intègre) noethérien D vérifie la formule de la dimension (on dit que D *vérifie la formule de la dimension*) si et seulement si D est universellement caténaire.

1. Radical dimensionnel

Dans ce paragraphe on généralise et on améliore certains résultats de J.M. Giral [7, Proposition 1.4, Corollaire 1.7]. Tous les anneaux considérés ici sont intègres.

Considérant une extension $D \subseteq R$, on note $n = \text{d.t.}[R : D]$ son degré de transcendance. Il existe alors un sous-anneau B de R, contenant D, isomorphe à l'anneau de polynômes $D[n]$. Si R est une D-algèbre de type fini, il existe donc un élément non nul f de D tel que R_f soit une extension entière de B_f et donc tel que $\dim(R_f) = \dim(D_f[n])$. Par ailleurs $\dim(D_f[n]) \geq \dim(D_f) + n$, on a même une égalité lorsque D est localement de Jaffard. Nous ferons grand usage de ces considérations par la suite, aussi nous les consignons dans un lemme :

Lemme 1.1. *Soit $D \subseteq R$ une extension de type fini.*

(i) *Il existe $f \neq 0$ dans D tel que*

$$\dim(R_f) \geq \dim(D_f) + \text{d.t.}[R : D].$$

(ii) *Si D est localement de Jaffard, il existe $f \neq 0$ dans D tel que*

$$\dim(R_f) = \dim(D_f) + \text{d.t.}[R : D].$$

On caractérise alors les anneaux de Jaffard dont le radical dimensionnel est nul, complétant ainsi [2, Théorème 4.4]. (C'est la dernière assertion qui est nouvelle ici, néanmoins on reprend ici toute la preuve pour être complet).

Théorème 1.2. *Soit D un anneau de Jaffard. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\text{Rd}(D) = (0)$,

(ii) *pour toute extension de type fini R de D,* $\dim(R) = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D]$,

(iii) *pour toute extension de type fini R de D,* $\text{Rd}(R) = (0)$,

(iv) *pour toute extension de type fini R de D, par tout idéal premier de R au-dessus de (0) passe une chaîne de longueur maximale de R,*

(v) *pour toute extension de type fini R de D, tout idéal premier de R au-dessus de (0) est l'intersection d'idéaux maximaux de hauteur maximale dans R.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit R une extension de type fini de D. D'après le lemme précédent, il existe $f \neq 0$ dans D tel que

$$\dim(R_f) \geq \dim(D_f) + \text{d.t.}[R : D].$$

Comme $\text{Rd}(D) = (0)$, on a $\dim(D_f) = \dim(D)$, et on tire

$$\dim(R) \geq \dim(R_f) \geq \dim(D_f) + \text{d.t.}[R : D] = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D].$$

Par ailleurs $\dim(R) \leq \dim(D) + \text{d.t.}[R : D]$, puisque D est un anneau de Jaffard [5, (30.11)], donc finalement $\dim(R) = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D]$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Pour tout f non nul dans D, comme R_f et R sont des D-algèbres de type fini, de même degré de transcendance sur D, on tire de l'hypothèse l'égalité

$$\dim(R_f) = \dim(R) = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D].$$

Ainsi $f \notin \text{Rd}(R)$.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Immédiat.

(ii)$\Rightarrow$ (iv) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R au dessus de (0). Comme R et $R/\mathfrak{p}$ sont deux extensions de type fini de D, on a à la fois

$$\dim(R) = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D] \tag{1}$$

et

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(D) + \text{d.t.}[R/\mathfrak{p} : D]. \tag{2}$$

Par ailleurs, si on localise par rapport à la partie multiplicative S complémentaire de (0) dans $D, S^{-1}D$ est un corps et l'extension de type fini $S^{-1}D \subseteq S^{-1}R$ vérifie la formule de la dimension. On a donc

$$\text{ht}_R\mathfrak{p} + \text{d.t.}[R/\mathfrak{p} : D] = \dim(R). \tag{3}$$

Des relations (1), (2) et (3), on tire alors

$$\text{ht}_R\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Soit f un élément non nul de D. Le localisé D_f peut s'écrire sous la forme $D[X]/\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul de $R = D[X]$ au-dessus de (0). Par hypothèse, on a donc

$$\dim(D_f) = \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R) - \text{ht}_R\mathfrak{p}.$$

Par ailleurs $\dim(R) = \dim(D) + 1$, puisque D est un anneau de Jaffard, et comme $\text{ht}_R\mathfrak{p} = 1$, on tire $\dim(D_f) = \dim(D)$.
(iii) et (iv) $\Rightarrow$ (v) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R au dessus de (0). Comme $R/\mathfrak{p}$ est une extension de type fini de D, on a $\text{Rd}(R/\mathfrak{p}) = (0)$. Ainsi $\mathfrak{p}$ est l'intersection d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ tels que $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ est de hauteur maximale dans $R/\mathfrak{p}$. Pour un tel idéal $\mathfrak{m}$, on a $\text{ht}_R\mathfrak{m} \geq \text{ht}_R\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)$ (puisque par $\mathfrak{p}$ passe une chaîne de longueur maximale de R). Donc $\mathfrak{m}$ est aussi un idéal de hauteur maximale de R. En conclusion $\mathfrak{p}$ est l'intersection d'idéaux maximaux de hauteur maximale dans R.
(v) $\Rightarrow$ (iii) C'est clair puisqu'en particulier (0) est un idéal premier de R au-dessus de (0). $\diamond$

A défaut de toujours avoir l'égalité $\dim(R) = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D]$, on donne maintenant une condition nécessaire, lorsque l'extension $D \subseteq R$ vérifie l'inégalité de la dimension (ce qui est le cas si D est noethérien ou plus généralement un anneau localement de Jaffard).

Lemme 1.3. *Soit $D \subseteq R$ une extension d'anneaux vérifiant l'inégalité de la dimension. Si* $\dim(R) = \dim(D) + \text{d.t.}[R : D]$, *alors* $\text{Rd}(D) \subseteq \text{Rd}(R) \cap D$.

Démonstration. Soit f un élément de D tel que $f \notin \text{Rd}(R) \cap D$. Il existe donc un idéal premier $\mathfrak{q}$ de hauteur maximale dans R auquel f n'appartient pas. Posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$, on a par hypothèse les relations

$$\dim(D) + \text{d.t.}[R : D] = \dim(R) = \text{ht}_R\mathfrak{q} \leq \text{ht}_D\mathfrak{p} + \text{d.t.}[R : D].$$

On tire $\dim(D) \leq \text{ht}_D\mathfrak{p}$, donc en fait $\dim(D) = \text{ht}_D\mathfrak{p}$. Ainsi $\mathfrak{p}$ est de hauteur maximale dans D et ne contient pas f, donc $f \notin \text{Rd}(D)$. $\diamond$

Dans le cas d'un anneau localement de Jaffard, on peut alors compléter le théorème 1.2 comme suit :

Proposition 1.4. *Soit D un anneau localement de Jaffard. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\text{Rd}(D) = (0)$,
(ii) *tout idéal premier au-dessus de* (0) *de* $D[X]$ *est l'intersection d'idéaux maximaux de hauteur maximale de* $D[X]$.

(iii) *tout idéal premier au-dessus de* (0) *de* $D[X]$ *est inclus dans un idéal maximal de hauteur maximale de* $D[X]$,
(iv) $\mathrm{Rd}(D[X]) = (0)$,
(v) *il existe une extension de type fini* R *de* D *pour laquelle* $\mathrm{Rd}(R) = (0)$ *et telle que* $\dim(R) = \dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D]$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) [Théorème 1.2].
(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est clair.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Soit f un élément non nul de $D[X]$. Il est clair que chacun des polynômes fX et $fX - 1$ est contenu dans un idéal premier de $D[X]$ au-dessus de (0) et donc dans un idéal maximal de hauteur maximale. Mais un même idéal ne peut contenir ces deux polynômes (puisque leur somme est l'unité). En particulier fX n'est pas contenu dans tous les idéaux de hauteur maximale, soit $fX \notin \mathrm{Rd}(D[X])$. A fortiori $f \notin \mathrm{Rd}(D[X])$.
(iv) $\Rightarrow$ (v) Il suffit de considérer $R = D[X]$.
(v) $\Rightarrow$ (i) Comme $\dim(R) = \dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D]$, il résulte du lemme précédent qu'on a $\mathrm{Rd}(D) \subseteq \mathrm{Rd}(R) \cap D$. Si $\mathrm{Rd}(R) = (0)$, alors évidemment $\mathrm{Rd}(D) = (0)$. $\diamond$

On a vu que, si D est un anneau de Jaffard, alors $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ implique que pour toute extension de type fini R de D et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R au-dessus de (0), il passe par $\mathfrak{p}$ une chaîne de longueur maximale [Théorème 1.2]. Si D est localement de Jaffard (en particulier si D est noethérien), sans supposer $\mathrm{Rd}(D) = (0)$, on montre ici que la même conclusion vaut pour les extensions de type fini telles que $\mathrm{Rd}(R) = (0)$. (On peut d'ailleurs rappeler que $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ implique $\mathrm{Rd}(R) = (0)$ pour toute extension R de type fini.)

Proposition 1.5. *Soient* D *un anneau localement de Jaffard et* R *une extension de type fini de* D *telle que* $\mathrm{Rd}(R) = (0)$. *Alors par tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* R *au-dessus de* (0) *passe une chaîne de longueur maximale de* R.

Démonstration. On se sert du fait élémentaire que pour tout anneau (intègre de dimension finie) il existe un élément non nul f de D tel que $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$ (par souci d'être complet nous en avons fait l'objet du lemme suivant). Un tel f étant choisi, R_f est une extension de type fini de D_f et $\mathfrak{p}_f$ un idéal de R_f au-dessus de (0). On a donc [Théorème 1.2]

$$\mathrm{ht}_{R_f}\mathfrak{p}_f + \dim(R_f/\mathfrak{p}_f) = \dim(R_f).$$

Comme $\mathrm{Rd}(R) = (0)$, on a $\dim(R) = \dim(R_f)$. On tire

$$\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} + \dim\big((R/\mathfrak{p})_f\big) = \dim(R).$$

Donc $\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) \geq \dim(R)$, soit, en fait, $\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)$. $\diamond$

Lemme 1.6. *Soit* D *un anneau* (*intègre de dimension finie*). *Alors il existe un élément non nul* f *de* D *tel que* $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$.

Démonstration. Si $\mathrm{Rd}(D) = (0)$, on peut prendre $f = 1$. Dans le cas contraire, il existe $f_1 \neq 0$ dans $\mathrm{Rd}(D)$, et alors $\dim(D_{f_1}) < \dim(D)$. Si $\mathrm{Rd}(D_{f_1}) = (0)$, on a gagné, sinon il existe f_2 tel que $\dim(D_{f_1 f_2}) < \dim(D_{f_1})$. Comme D est de dimension finie, le processus doit s'arrêter et nous conduire ainsi à un localisé dont le radical dimensionnel est nul. $\diamond$

Pour terminer ce paragraphe, on se restreint au cas où D est noethérien. On sait qu'en général, pour $f \neq 0$, on a $\dim(D_f) \leq \dim(D)$ (avec égalité si et seulement si $f \notin \mathrm{Rd}(D)$). Dans le cas noethérien, on a en outre $\dim(D) - 1 \leq \dim(D_f)$ [7, Proposition 1.4] (si $f \neq 0$, il existe une infinité d'idéaux premiers de hauteur $\dim(D) - 1$ et, parmi ceux-ci, un idéal auquel f n'appartient pas). De manière analogue, on peut aussi minorer la longueur de certaines chaînes d'idéaux premiers :

Proposition 1.7. *Soient D un anneau noethérien, R une extension de type fini de D et $\mathfrak{p}$ un idéal de R au-dessus de* (0). *Alors*

$$\dim(R) - 1 \leq \mathrm{ht}_R\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R).$$

Démonstration. Comme pour la proposition 1.5, on trouve un élément $f \neq 0$ de D tel que

$$\mathrm{ht}_{R_f}\mathfrak{p}_f + \dim(R_f/\mathfrak{p}_f) = \dim(R_f).$$

Si $f \notin \mathrm{Rd}(R)$, on a $\dim(R_f) = \dim(R)$ et on peut conclure que par $\mathfrak{p}$ passe une chaîne de longueur maximale de R. Sinon $\dim(R_f) = \dim(R) - 1$, puisque R est également noethérien, et on tire

$$\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} + \dim\big((R/\mathfrak{p})_f\big) = \dim(R) - 1.$$

Donc $\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) \geq \dim(R) - 1$. $\diamond$

Si D est noethérien, le lemme 1.3 admet une réciproque :

Proposition 1.8. *Soient D un anneau noethérien et $D \subseteq R$ une extension de type fini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\dim(R) = \dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D]$,
(ii) $\mathrm{Rd}(D) \subseteq \mathrm{Rd}(R) \cap D$.

Démonstration. Il reste à montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i). D'après le lemme 1.1, il existe $f \neq 0$ dans D tel que $\dim(R_f) = \dim(D_f) + \mathrm{d.t.}[R : D]$. Deux cas peuvent alors se présenter.
— Si $f \notin \mathrm{Rd}(D)$, alors $\dim(D) = \dim(D_f)$, et on tire

$$\dim(R) \geq \dim(R_f) = \dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D].$$

On a donc $\dim(R) = \dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D]$ (puisque $\dim(R)$ est toujours majoré par $\dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D]$ lorsque D est noethérien).
— Si $f \in \mathrm{Rd}(D)$, alors par hypothèse $f \in \mathrm{Rd}(R)$. Comme D et R sont noethériens, on a $\dim(D_f) = \dim(D) - 1$ et $\dim(R_f) = \dim(R) - 1$ et on peut aisément conclure. $\diamond$

On sait qu'en général il existe un élément $f \neq 0$ de D tel $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$ [Lemme 1.6]. On termine ce paragraphe avec un résultat plus précis dans le cas où D est noethérien (qui donne aussi une réciproque à [7, Corollary 1.7])

Corollaire 1.9. *Soit D un anneau noethérien tel que* $\mathrm{Rd}(D) \neq (0)$ *et f un élément non nul de D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in \mathrm{Rd}(D)$,
(ii) $\dim(D_f) < \dim(D)$,
(iii) $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$.

Démonstration. L'équivalence des deux premières assertions est vraie en général (sans supposer D noethérien), elle est donnée ici pour mémoire.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) [7, Corollaire 1.7]. Supposons que $\dim(D_f) < \dim(D)$. Si $\mathrm{Rd}(D_f)$ n'était pas nul, on trouverait $g \neq 0$ (dans $\mathrm{Rd}(D_f)$) tel que $\dim(D_{fg}) < \dim(D_f) < \dim(D)$, soit $\dim(D_{fg}) < \dim(D) - 1$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$. Puisque $\mathrm{Rd}(D)$ n'est pas nul, on ne peut alors avoir l'inclusion $\mathrm{Rd}(D) \subseteq \mathrm{Rd}(D_f) \cap D$. On tire alors la conclusion de la proposition précédente. $\diamond$

2. Anneaux de Hilbert et radical dimensionnel

On se restreint désormais aux anneaux noethériens et on se propose ici de caractériser les anneaux de Hilbert à l'aide des radicaux dimensionnels. Par définition, un anneau R (non nécessairement intègre) est de Hilbert si et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ qui n'est pas maximal on a $\mathrm{Rad}(R/\mathfrak{p}) = (0)$. On sait en outre que si R est noethérien, on peut se borner à considérer les idéaux premiers de cohauteur 1, pour lesquels on a évidemment $\mathrm{Rad}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Rd}(R/\mathfrak{p})$. Autrement dit, un anneau noethérien R est de Hilbert si et seulement si tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de cohauteur 1 est contenu dans une infinité d'idéaux maximaux [10, Theorem 147]. On en tire la caractérisation suivante :

Théorème 2.1. *Soit R un anneau noethérien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) *R est un anneau de Hilbert,*
(ii) *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de cohauteur 1 de R, on a $\mathrm{Rd}(R/\mathfrak{p}) = (0)$,*
(iii) *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, on a $\mathrm{Rd}(R/\mathfrak{p}) = (0)$.*

Démonstration. Compte tenu du résultat rappelé ci-dessus, il reste à établir qu'on a (i) $\Rightarrow$ (iii). Comme la notion d'anneau de Hilbert est stable par quotient, on peut se restreindre au cas d'un anneau intègre D et il suffit de montrer que $\mathrm{Rd}(D) = (0)$. Comme, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de cohauteur 1 de D, on a $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = (0)$, le résultat se déduit facilement du lemme ci-dessous. $\diamond$

Lemme 2.2. *Soit D un anneau intègre noethérien de dimension de Krull n. Supposons qu'il existe un entier $h, 0 \leq h < n$ tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur h et de cohauteur $n-h$ dans D, on a $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = (0)$. Alors $\mathrm{Rd}(D) = (0)$.*

Démonstration. On peut supposer $n \geq 2$, en effet, l'hypothèse n'a de sens que pour $n > 0$ (d'ailleurs, pour $n = 0, D$ est un corps), et si $n = 1$, alors $h = 0$ et l'hypothèse signifie alors en fait que $\mathrm{Rd}(D) = (0)$). On considère un élément $f \neq 0$ de D, on montre qu'il n'appartient pas à $\mathrm{Rd}(D)$.
— On montre d'abord, par récurrence sur h, qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur h et de cohauteur $n-h$ dans D tel que $f \notin \mathfrak{p}$. C'est évident si $h = 0$. Supposons qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}_0$ de hauteur $h-1$ et de cohauteur $n-h+1$ tel que $f \notin \mathfrak{p}_0$. Il passe donc une chaîne maximale de D par $\mathfrak{p}_0$. Par ailleurs $n-h+1 \geq 2$, et on a $\mathfrak{q}$ dans la chaîne tel que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}_0) = 2$, soit

$$(0) \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_0 \subset \ . \subset \mathfrak{q} \subset \ldots$$

Puisque D est noethérien, il y a une infinité d'idéaux premiers de D entre $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{q}$, ils sont tous de hauteur h et de cohauteur $n-h$. Par contre, seul un nombre fini d'entre-eux contient f (puisque la classe de f n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux dans l'anneau quotient $D/\mathfrak{p}_0$).
— Comme $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur h et de cohauteur $n-h$, on a par hypothèse $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = (0)$. Il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{m}$, tel que $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ est de

hauteur maximale dans $D/\mathfrak{p}$, soit $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = n - h$, et tel que la classe de f dans $D/\mathfrak{p}$ n'appartient pas à $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$, soit $f \notin \mathfrak{m}$. Cet idéal $\mathfrak{m}$ est de hauteur maximale dans D, puisqu'on a

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = h + n - h = n.$$

En conclusion $f \notin \mathrm{Rd}(D)$. $\diamond$

Remarques 2.3. (1) Dans le lemme précédent il suffit bien sûr de supposer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur h *ou bien* pour tout idéal premier de cohauteur $n-h$, on a $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = (0)$.
(2) Pour un anneau intègre D de dimension 1, noethérien ou non, il est clair que le radical de Jacobson et le radical dimensionnel coïncident, donc que D est de Hilbert si et seulement si $\mathrm{Rd}(D) = (0)$. Par contre, en dimension 2 déjà, l'Exemple 2.4 (a) montre qu'un anneau de Hilbert non noethérien n'est pas nécessairement de radical dimensionnel nul et l'Exemple 2.4 (b) montre que, même dans le cas noethérien, il ne suffit pas que ce radical soit nul pour que D soit de Hilbert.

Exemples 2.4. (a) Soit l'anneau $D = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ (formé des polynômes à coefficients rationnels dont le terme constant est entier). Il partage avec l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[X]$ l'idéal $X\mathbb{Q}[X]$. C'est un anneau de Prüfer (on peut s'inspirer par exemple de [5, §22, Exercice 13]). Il résulte des théories générales sur les couples d'anneaux partageant un idéal ou produits fibrés [3, 4], que D est de dimension 2 et que son spectre est formé des idéaux suivants.

— Les idéaux premiers ne contenant pas X. A part l'idéal (0), ils sont maximaux, de hauteur 1 et de la forme $D \cap f\mathbb{Q}[X]$, où f est un polynôme irréductible, à coefficients rationnels, non associé à X.

— L'idéal $X\mathbb{Q}[X]$, de hauteur 1.

— Les idéaux de la forme $p + X\mathbb{Q}[X]$, où p est un nombre premier. Ils sont maximaux, de hauteur 2, d'intersection l'idéal $X\mathbb{Q}[X]$.

Il est donc clair que les seuls idéaux premiers qui ne sont pas maximaux, soient (0) et $X\mathbb{Q}[X]$, sont intersection d'idéaux maximaux, donc que D est un anneau de Hilbert. Par contre $\mathrm{Rd}(D)$ est l'intersection des idéaux maximaux de hauteur 2, soient des idéaux de la forme $p + X\mathbb{Q}[X]$, et donc $\mathrm{Rd}(D) = X\mathbb{Q}[X]$.

(b) Soient $K[X,Y,Z]$ l'anneau de polynômes en trois indéterminées sur un corps K et les idéaux $\mathfrak{m}_1 = (X,Y,Z)$ et $\mathfrak{n}_1 = (X-1, Z)$. On note $B = S^{-1}K[X,Y,Z]$ son localisé par rapport à la partie multiplicative complémentaire de la réunion $\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1$. Enfin on localise de nouveau et on considère l'anneau $D = B[1/X] = B_X$. On a alors les faits suivants pour l'anneau D.

— Cet anneau est évidemment noethérien.

— Il est de dimension 2 et coéquidimensionnel. En effet, B est semi local d'idéaux maximaux $\mathfrak{m} = S^{-1}\mathfrak{m}_1$ (de hauteur 3) et $\mathfrak{n} = S^{-1}\mathfrak{n}_1$ (de hauteur 2). Dans $D = B_X$, l'idéal $\mathfrak{n}$ se relève en $\mathfrak{n}_X$ (toujours de hauteur 2) mais $\mathfrak{m}$ ne survit pas. Ainsi D est bien de dimension 2. Montrons qu'il est coéquidimensionnel, donc que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 de B qui ne contient pas X, alors $\mathfrak{p}_X$ n'est pas maximal dans D. En effet, ou bien $\mathfrak{p}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$ et alors $\mathfrak{p}_X$ est contenu dans $\mathfrak{n}_X$, ou bien il existe au moins un idéal $\mathfrak{q}$ tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ et ne contenant pas X (en fait il en existe une infinité) et donc $\mathfrak{p}_X$ est contenu dans $\mathfrak{q}_X$.

— D n'est pas un anneau de Hilbert. En effet soit $\mathfrak{p}_0 = S^{-1}(X-1)$ l'idéal premier de hauteur 1 de $B = S^{-1}K[X,Y,Z]$ engendré par $X-1$. Il est contenu dans $\mathfrak{n}$ mais pas dans $\mathfrak{m}$. Il en résulte que l'idéal premier $(\mathfrak{p}_0)_X$ de D n'est contenu que dans le seul idéal maximal $\mathfrak{n}_X$.

— Enfin $\mathrm{Rd}(D) = (0)$. En effet, posant $f = X$, il est évident que f appartient à $\mathrm{Rd}(B)$ (puisqu'il appartient au seul idéal premier de hauteur maximale de B) et que $D = B_f$, on peut alors appliquer le corollaire 1.9.

Avec une condition forte de coéquidimensionnalité, on montre ici qu'il suffit néanmoins que $\mathrm{Rd}(D)$ soit nul pour que D soit un anneau de Hilbert.

Corollaire 2.5. *Soit D un anneau intègre noethérien de dimension de Krull n. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est un anneau de Hilbert coéquidimensionnel,*
(ii) *pour tout $f \neq 0, D_f$ est coéquidimensionnel et de dimension n.*
(iii) $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ *et, pour tout $f \neq 0, D_f$ est coéquidimensionnel.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sans supposer D noethérien, si D est un anneau de Hilbert coéquidimensionnel, alors d'abord $\mathrm{Rd}(D) = \mathrm{Rad}(D) = (0)$. Soit ensuite $f \neq 0$. Un idéal maximal de D_f est de la forme $\mathfrak{p}_f$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de D ne contenant pas f. En fait $\mathfrak{p}$ est maximal. Sinon $\mathfrak{p}$ est l'intersection d'idéaux maximaux de D (puisque D est un anneau de Hilbert), l'un d'eux ne contient pas f, mais alors $\mathfrak{p}_f$ n'est pas maximal dans D_f. On tire

$$\mathrm{ht}_{D_f}(\mathfrak{p}_f) = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) = \dim(D) = n \geq \dim(D_f),$$

soit en fait $\mathrm{ht}_{D_f}(\mathfrak{p}_f) = \dim(D_f) = n$.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Toujours sans supposer D noethérien, on sait que $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ si et seulement si, pour tout $f \neq 0$, on a $\dim(D_f) = \dim(D)$ [2, Proposition 4.1].
(ii) $\Rightarrow$ (i) Si D_f est coéquidimensionnel pour tout f, alors en particulier D est coéquidimensionnel. Supposons qu'il ne soit pas de Hilbert. Revenant au cas noethérien, il existe alors un idéal premier $\mathfrak{p}$ de cohauteur 1 qui n'est contenu que dans un nombre fini d'idéaux maximaux. On peut choisir f dans l'intersection de ces idéaux et tel que $f \notin \mathfrak{p}$. Alors $\mathfrak{p}_f$ est un idéal maximal de D_f. Mais supposant que D_f est coéquidimensionnel, on a alors $\dim(D_f) = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) < n$. $\diamond$

3. Radical Hilbertien

Dans toute cette partie, D désigne un anneau intègre noethérien. On pose la définition suivante.

Définition 3.1. Soit D un anneau (intègre noethérien.) On appelle *radical hilbertien* de D, on note $H(D)$, la partie

$$H(D) = \{f \in D^* \mid D_f \text{ est un anneau de Hilbert}\} \cup \{0\}.$$

Le premier résultat de ce paragraphe consiste à montrer que $H(D)$ est effectivement un idéal de D. Notons que, si D n'est pas intègre, D_f n'a de sens que si f n'est pas nilpotent donc que $H(D)$ n'est pas un idéal en général.

Proposition 3.2. *Soit D un anneau* (*intègre noethérien.*) *Alors $H(D)$ est un idéal radical de D.*

Démonstration. Si D_f est un anneau de Hilbert, il en est alors de même de $D_{\lambda f} = D_f[1/\lambda]$ pour tout $\lambda \neq 0$; il suffit donc de montrer que, si f et g sont deux éléments non nuls de $H(D)$ tels que $f + g \neq 0$, alors $D_{(f+g)}$ est un anneau de Hilbert. Soit $\mathfrak{p}$

un idéal premier de D tel que $\mathfrak{p}_{(f+g)}$ soit de cohauteur 1 dans $D_{(f+g)}$. Par hypothèse, $\dim(D_{(f+g)}/\mathfrak{p}_{(f+g)}) = 1$, donc $1 \leq \dim(D/\mathfrak{p}) \leq 2$. Par ailleurs, il est clair que $\mathfrak{p}$ est strictement contenu dans un idéal $\mathfrak{m}$ qui survit dans $D_{(f+g)}$ donc que f et g n'appartiennent pas simultanément à $\mathfrak{m}$. Disons que $f \notin \mathfrak{m}$, alors $1 \leq \dim(D_f/\mathfrak{p}_f)$. Deux cas peuvent alors se présenter :
— ou bien $\dim(D_f/\mathfrak{p}_f) = \dim(D/\mathfrak{p})$. Comme $D_f/\mathfrak{p}_f$ est une $D/\mathfrak{p}$-algèbre de type fini et que $\mathrm{Rd}(D_f/\mathfrak{p}_f) = (0)$, puisque D_f est un anneau de Hilbert [Théorème 2.1], il résulte du proposition 1.4 que $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = (0)$. Enfin, comme $D_{(f+g)}/\mathfrak{p}_{(f+g)}$ est une $D/\mathfrak{p}$-algèbre de type fini, on tire du théorème 1.2 que $\mathrm{Rd}\big(D_{(f+g)}/\mathfrak{p}_{(f+g)}\big) = (0)$.
— ou bien $\dim(D_f/\mathfrak{p}_f) < \dim(D/\mathfrak{p})$. Comme $\dim(D_f/\mathfrak{p}_f) \geq 1$, alors $\dim(D/\mathfrak{p}) \geq 2$, d'où $\dim(D_{(f+g)}/\mathfrak{p}_{(f+g)}) < \dim(D/\mathfrak{p})$ (et en fait $\dim(D/\mathfrak{p}) = 2$). Mais alors la classe de $f+g$ modulo $\mathfrak{p}$ est dans $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p})$. On tire encore $\mathrm{Rd}\big(D_{(f+g)}/\mathfrak{p}_{(f+g)}\big) = (0)$, cette fois du corollaire 1.9.

En tout état de cause, on peut conclure à l'aide du théorème 2.1 que $D_{(f+g)}$ est un anneau de Hilbert.

Enfin on voit que $\sqrt{H(D)} = H(D)$ (c'est à dire que $H(D)$ est un idéal radical), puisque, pour tout $f \neq 0$ dans D et tout entier n, on a $D_{f^n} = D_f$. $\diamond$

Dans le cas d'un anneau noethérien de dimension 1, il est facile de déterminer le radical hilbertien $H(D)$. En effet, si D est un anneau de Hilbert, alors évidemment $H(D) = D$. Dans le cas contraire, D est semi-local, et on a

$$H(D) = \mathrm{Rad}(D) = \mathrm{Rd}(D).$$

En effet, si $f \neq 0$, alors, ou bien $f \notin \mathrm{Rad}(D)$, auquel cas D_f est à son tour semi-local et de dimension 1 et n'est donc pas de Hilbert, ou bien $f \in \mathrm{Rad}(D)$, auquel cas D_f est un corps (et donc un anneau de Hilbert). Dans la suite on s'intéresse donc à un anneau de dimension au moins 2. On introduit alors un nouveau radical :

Définition 3.3. Soit D un anneau tel que $\dim(D) \geq 2$. On note $\mu(D)$ l'intersection des idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de D tels que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq 2$.

Il est évident qu'en général on a les inclusions

$$\mathrm{Rad}(D) \subseteq \mu(D) \subseteq \mathrm{Rd}(D).$$

On fait maintenant le lien avec le radical hilbertien.

Proposition 3.4. *Soit D un anneau (intègre noethérien) tel que* $\dim(D) \geq 2$. *Alors*

$$\mu(D) \subseteq H(D).$$

Si $\mathrm{Rd}(D) \neq (0)$, *on a en outre*

$$H(D) \subseteq \mathrm{Rd}(D).$$

Démonstration. Montrons d'abord la première inclusion. Soit $f \neq 0, f \in \mu(D)$. Notons qu'on a

$$1 \leq \dim(D) - 1 \leq \dim(D_f) \leq \dim(D).$$

Envisageons deux cas :
— $\dim(D_f) = 1$. On a alors nécessairement $\dim(D) = 2$, donc $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$ [Corollaire 1.9]. Mais alors D_f (qui est de dimension 1) est un anneau de Hilbert.
— $\dim(D_f) > 1$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier tel que $\mathfrak{p}_f$ soit de cohauteur 1 dans D_f. Il est clair que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$. Soit alors $\mathfrak{q}$ un idéal premier tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}_f$ est maximal

dans D_f. On a évidemment $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq 2$. Comme $\mathfrak{q}_f$ survit dans D_f, alors $f \notin \mathfrak{q}$. Par ailleurs $f \in \mu(D)$, autrement dit f est dans tous les idéaux maximaux de hauteur au moins 2. En conclusion, $\mathfrak{q}$ n'est pas un idéal maximal de D et en particulier

$$\dim(D/\mathfrak{p}) \geq 2, \text{ soit } \dim(D/\mathfrak{p}) > \dim(D_f/\mathfrak{p}_f) = 1.$$

On tire $\mathrm{Rd}(D_f/\mathfrak{p}_f) = (0)$ [Corollaire 1.9]. Comme ceci est vrai de tous les idéaux premiers de cohauteur 1 dans D_f, on conclut encore que D_f est un anneau de Hilbert [Théorème 2.1].

Voyons maintenant la seconde inclusion. Soit $f \in H(D), f \neq 0$. Alors D_f est un anneau de Hilbert et en particulier $\mathrm{Rd}(D_f) = (0)$. Si $\mathrm{Rd}(D) \neq (0)$, on tire $f \in \mathrm{Rd}(D)$ [Corollaire 1.9]. $\diamond$

On peut conclure à l'égalité $H(D) = \mu(D)$ dans certains cas, par exemple si D est semi-local et plus généralement dans la situation suivante.

Proposition 3.5. *Soit D un anneau (intègre noethérien) tel que* $\dim(D) \geq 2$. *Si les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de D tels que* $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq 2$ *sont en nombre fini, alors* $H(D) = \mu(D)$.

Démonstration. En vertu de la proposition précédente, il reste à montrer qu'on a $H(D) \subseteq \mu(D)$. Considérons un élément f tel que $f \notin \mu(D)$. Il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D tels que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq 2$ et $f \notin \mathfrak{m}$. L'hypothèse de finitude permet de considérer un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 qui est contenu dans $\mathfrak{m}$ mais dans aucun autre idéal maximal de hauteur supérieure ou égale à 2 (il suffit de prendre pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal d'un élément z qui appartient à $\mathfrak{m}$ mais à aucun autre idéal maximal de hauteur supérieure ou égale à 2). Alors $D/\mathfrak{p}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ et $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. Comme $f \notin \mathfrak{m}$, on tire $\mathrm{Rd}(D_f/\mathfrak{p}_f) \neq (0)$ [Corollaire 1.9]. En conclusion, D_f n'est pas un anneau de Hilbert [Théorème 2.1]. $\diamond$

Dans d'autres cas, on peut conclure, à l'égalité $H(D) = \mathrm{Rd}(D)$.

Proposition 3.6. *Soit D un anneau (intègre noethérien) tel que* $\mathrm{Rd}(D) \neq (0)$ *et tel que par tout idéal premier de cohauteur 1 passe une chaîne de longueur maximale. Alors* $H(D) = \mathrm{Rd}(D)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 3.4, il reste à montrer qu'on a $\mathrm{Rd}(D) \subseteq H(D)$. Soit donc $f \in \mathrm{Rd}(D), f \neq 0$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de D tel que $\mathfrak{p}_f$ soit de cohauteur 1 dans D_f, on a $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \dim(D_f) < \dim(D)$ (la dernière inégalité puisque $f \in \mathrm{Rd}(D)$). Donc $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \dim(D) - 1$. Mais alors $\mathfrak{p}$ n'est pas de cohauteur 1 dans D (sinon toute chaîne passant par $\mathfrak{p}$ est de longueur strictement inférieure à $\dim(D)$). On tire donc $1 = \dim(D_f/\mathfrak{p}_f) < \dim(D/\mathfrak{p})$. Ainsi $\mathrm{Rd}(D_f/\mathfrak{p}_f) = (0)$ [Corollaire 1.9] et en conclusion D_f est un anneau de Hilbert puisque ceci est vrai pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}_f$ soit de cohauteur 1 dans D_f [Théorème 2.1]. $\diamond$

Remarques 3.7. (a) Notons que pour un anneau de dimension 2, on a évidemment $\mathrm{Rd}(D) = \mu(D)$. Si $\mathrm{Rd}(D) \neq (0)$, on tire alors $\mathrm{Rd}(D) = H(D) = \mu(D)$. Si D est de Hilbert, on a alors $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ tandis que $H(D) = D$. Enfin si $\mathrm{Rd}(D) = (0)$ mais D n'est pas de Hilbert, comme dans l'Exemple 2.4 (b), on a les inclusions strictes $\mathrm{Rd}(D) \subset H(D) \subset D$.

Revenons a l'exemple cité ci-dessus : c'est celui d'un anneau noethérien D équidimensionnel de dimension 2. Il est de la forme $D = B_X$, où B est semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Pour tout $f \in \mathfrak{n}, f \neq 0$, le produit Xf appartient clairement au radical $\mu(D)$ (puisque $X \in \mathfrak{m}$), et il résulte de la proposition 3.5 que $B_{Xf} = D_f$ est un anneau de Hilbert. On conclut facilement que $H(D)$ est l'idéal maximal $\mathfrak{n}_X$ de D.

(b) Dans les conditions de la proposition précédente on a souvent en fait l'égalité $\mathrm{Rd}(D) = \mu(D)$ (par exemple si D est de dimension 2, ainsi qu'on vient de le noter). On donne ci-dessous un exemple où $\mathrm{Rd}(D) \neq \mu(D)$ et $H(D) = \mu(D)$ (en dehors des hypothèses de la proposition précédente) [Exemple 3.10].

On montre maintenant que le radical hilbertien de l'anneau de polynômes $D[n]$ en n indéterminées sur D est l'étendu du radical de D. Pour cela on commence par un lemme sur les valeurs d'un polynôme (en une indéterminée, mais on généraliserait sans peine à plusieurs indéterminées).

Lemme 3.8. *Soit D un anneau (intègre noethérien) de corps des fractions K, L un corps contenant K et $\alpha \in L$. Si f est un polynôme non nul tel que $f \in H\big(D[X]\big)$, alors $f(\alpha) \in H\big(D[\alpha]\big)$.*

Démonstration. C'est clair puisque $D[\alpha]_{f(\alpha)}$ est une image homomorphe de $D[X]_f$ qui est un anneau de Hilbert par hypothèse. $\diamond$

Proposition 3.9. *Soit D un anneau (intègre noethérien). Pour tout entier naturel n, on a l'égalité $H\big(D[n]\big) = H(D)[n]$.*

Démonstration. Raisonnant par récurrence sur n, il suffit de montrer qu'on a $H\big(D[X]\big) = H(D)[X]$. Si $f \in H(D), f \neq 0$, alors D_f est un anneau de Hilbert ainsi donc que $D_f[X]$, d'où l'inclusion $H(D)[X] \subseteq H\big(D[X]\big)$. Pour l'inclusion inverse on s'inspire de [11, Lemme 2.10]. D'après le lemme précédent, si $f(X) \in H\big(D[X]\big)$, alors, pour tout entier $k, f(X^k) \in H\big(D[X]\big)$ (en notant que si $\alpha = X^k$, alors $D[X][\alpha] = D[X]$). Supposons que f est de degré d, soit

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d.$$

On a l'égalité matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & X & \ldots & X^d \\ 1 & X^2 & \ldots & X^{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X^{d+1} & \ldots & X^{d(d+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X) \\ f(X^2) \\ \vdots \\ f(X^{d+1}) \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice carrée, qui est un déterminant de Vandermonde, est le polynôme $g(X) = \prod_{1 \leq r < s \leq (d+1)} (X^s - X^r)$, on a donc $g(X)a_j \in H\big(D[X]\big)$, pour chacun des coefficients a_j de f. Soit α une racine de $g(X) - 1$ dans une clôture algébrique du corps des fractions K de D (ainsi $g(\alpha) = 1$). Notons que α est entier sur D (puisque $g(X) - 1$ est un polynôme unitaire). On tire du lemme 3.8 que $g(\alpha)a_j = a_j$ appartient à $H\big(D[\alpha]\big)$. Autrement dit, pour tout coefficient a_j différent de 0, $D[\alpha]_{a_j}$ est un anneau de Hilbert. Comme cet anneau est entier sur D_{a_j}, on peut conclure que D_{a_j} est de Hilbert, soit que a_j appartient à $H(D)$. $\diamond$

Exemple 3.10. Soit D un anneau noethérien local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On a alors les égalités $\mathrm{Rd}(D) = \mu(D) = H(D) = \mathfrak{m}$ [Proposition 3.5]. On tire de la proposition précédente que, pour tout n, on a $H\big(D[n]\big) = \mathfrak{m}[n] = \mathrm{Rd}(D)[n]$, or par ailleurs

$\mathrm{Rd}(D)[n] = \mathrm{Rd}\big(D[n]\big)$ [2, Corollaire 3.6]. On voit donc que $H\big(D[n]\big) = \mathrm{Rd}\big(D[n]\big)$ alors que, si $\dim(D) \geq 2$, ou $n \geq 2$, il est clair que $D[n]$ possède des idéaux maximaux de hauteur au moins 2 qui ne sont pas de hauteur maximale et qu'on a l'inclusion stricte $\mu\big(D[n]\big) \subset \mathrm{Rd}\big(D[n]\big) = \mathfrak{m}[n]$.

En s'inspirant des travaux de N. Onoda et K. Yoshida [11, 12, 14], on termine par une caractérisation des anneaux de Hilbert à partir de leurs localisés. On commence par un lemme.

Lemme 3.11. *Soit D un anneau (intègre noethérien) et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $H(D) \not\subseteq \mathfrak{p}$,
(ii) *il existe un suranneau R de D, algèbre de type fini sur D, qui est de Hilbert et tel que $D \subseteq R \subseteq D_{\mathfrak{p}}$.*

Démonstration. Si $H(D) \not\subseteq \mathfrak{p}$, alors il existe $f \in H(D), f \notin \mathfrak{p}$. Ainsi D_f est un anneau de Hilbert, c'est une D-algèbre de type fini et $D \subseteq D_f \subseteq D_{\mathfrak{p}}$.

Inversement s'il existe une D-algèbre de type fini R, contenue dans $D_{\mathfrak{p}}$, qui est un anneau de Hilbert, on peut écrire $R = D[a_1/f_1, \ldots, a_s/f_s]$, où $f_1, \ldots, f_s \notin \mathfrak{p}$. Posons $f = \prod_{i=1}^{s} f_i$. Alors $R_f = D_f$ est un anneau de Hilbert et $f \notin \mathfrak{p}$. Donc $H(D) \not\subseteq \mathfrak{p}$. ⋄

On tire immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Soit D un anneau (intègre noethérien). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est un anneau de Hilbert,*
(ii) *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de D, il existe un suranneau R de D, algèbre de type fini sur D, qui est de Hilbert et tel que $D \subseteq R \subseteq D_{\mathfrak{p}}$,*
(iii) *pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D, il existe un suranneau R de D, algèbre de type fini sur D, qui est de Hilbert et tel que $D \subseteq R \subseteq D_{\mathfrak{m}}$.*

On n'a aucun exemple tel que $H(D) = (0)$. La proposition suivante jette quelque lumière sur cette question.

Proposition 3.13. *Soit D un anneau (intègre noethérien). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $H(D) \neq (0)$,
(ii) *pour toute D-algèbre (intègre) de type fini R contenant D, on a $H(R) \neq (0)$,*
(iii) *il existe une D-algèbre (intègre) de type fini R contenant D pour laquelle $H(R) \neq (0)$,*
(iv) *il existe un suranneau R de D de type fini pour lequel $H(R) \neq (0)$,*
(v) *il existe une D-algèbre (intègre) de type fini R contenant D qui est un anneau de Hilbert,*
(vi) *il existe un suranneau R de D de type fini qui est un anneau de Hilbert.*

Démonstration. Si $H(D) \neq (0)$ n'est pas nul, alors il existe $f \neq 0$ dans D tel que D_f est un anneau de Hilbert. Pour toute algèbre de type fini R, R_f est aussi un anneau de Hilbert, donc $H(R) \neq (0)$.

Si R est une D-algèbre de type fini et $H(R) \neq (0)$, alors il existe $f \neq 0$ dans R tel que R_f est un anneau de Hilbert, et bien sûr R_f est encore une D-algèbre de type fini.

Enfin il résulte du lemme 3.11 que s'il existe un suranneau R de D qui est une D-algèbre de type fini et un anneau de Hilbert, alors $H(D)$ n'est pas contenu dans l'idéal (0) (qui est évidemment un idéal premier).

On laisse au lecteur le soin d'en déduire (facilement) que toutes les assertions de la proposition sont équivalentes. $\diamond$

4. Conditions de chaîne

Soit D un anneau, $\mathfrak{P}$ un idéal premier de l'anneau de polynômes $D[n]$ et $\mathfrak{p}$ sa trace sur D, soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$. On appelle *hauteur relative* de $\mathfrak{P}$, on note $\varepsilon_{\mathfrak{P}}$, la hauteur de l'idéal $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}[n]$ dans l'anneau $D[n]/\mathfrak{p}[n]$. Il résulte alors du théorème de la chaîne spéciale [8, p. 35] qu'on a l'égalité $\mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + \varepsilon_{\mathfrak{P}}$. A l'aide de cette notion , on donne ici une nouvelle caractérisation des anneaux de Hilbert.

Théorème 4.1. *Soit D un anneau noethérien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est un anneau de Hilbert,*

(ii) *pour tout entier n et tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $D[n]$, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$, on a*
$$\dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big) + \mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + n,$$

(iii) *pour tout entier n et tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $D[n]$, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$, on a*
$$\varepsilon_{\mathfrak{P}} = \dim(D/\mathfrak{p}) + n - \dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big),$$

(iv) *pour tout entier n et tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $D[n]$, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$, on a*
$$\dim(D/\mathfrak{p}) \le \dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big),$$

(v) *pour tout entier n et tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $D[n]$, l'idéal $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap D$ est maximal dans D.*

(vi) *pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $D[X]$, l'idéal $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap D$ est maximal dans D.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Le quotient $D[n]/\mathfrak{P}$ est une $D/\mathfrak{p}$-algèbre de type fini, $D/\mathfrak{p}$ est un anneau de Jaffard et $\mathrm{Rd}(D/\mathfrak{p}) = (0)$ puisque D est un anneau de Hilbert [Théorème 2.1]. On tire donc du théorème 1.2 la relation
$$\dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big) = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{d.t.}[D[n]/\mathfrak{P} : D/\mathfrak{p}]. \tag{1}$$
Par ailleurs, quitte à remplacer D par $D/\mathfrak{p}_0$, où $\mathfrak{p}_0$ est un idéal premier minimal tel que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, on peut supposer que D est intègre (sans modifier les hauteurs de $\mathfrak{P}$ ni de $\mathfrak{p}$). L'extension $(D, D[n])$ vérifie alors la formule de la dimension, puisque D est localement de Jaffard [9, Lemme 1.4]. On a donc
$$\mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) + \mathrm{d.t.}[D[n]/\mathfrak{P} : D/\mathfrak{p}] = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + n. \tag{2}$$
Ajoutant membre à membre les relations (1) et (2) et simplifiant, on obtient l'égalité cherchée.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Cela découle immédiatement de la relation $\mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + \varepsilon_{\mathfrak{P}}$ rappelée avant l'énoncé du théorème.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Il suffit de noter que $\varepsilon_{\mathfrak{P}} \le n$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) Trivial.

(vi) $\Rightarrow$ (i) C'est une des définitions équivalentes des anneaux de Hilbert. $\diamond$

Corollaire 4.2. *Soit D un anneau noethérien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est un anneau de Hilbert coéquidimensionnel* (*resp. de Hilbert taut-level*),
(ii) *pour tout entier $n, D[n]$ est un anneau de Hilbert coéquidimensionnel* (*resp. $D[n]$ est un anneau de Hilbert taut-level*),
(iii) *il existe un entier $n \geq 1$, tel que $D[n]$ est coéquidimensionnel* (*resp. tel que $D[n]$ est taut-level*).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si D est de Hilbert, il en est bien sûr de même de $D[n]$, pour tout n. Si en outre D est coéquidimensionnel, et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $D[n]$, posant $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap D$, alors $\mathfrak{m}$ est maximal dans D, donc $\mathrm{ht}_D(\mathfrak{m}) = n$, et

$$\mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{M}) = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{m}) + n = \dim(D) + n = \dim\big(D[n]\big).$$

Si maintenant on suppose que D est taut-level et si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $D[n]$, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$, on tire du théorème 4.1 la relation

$$\dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big) + \mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + n,$$

soit, puisque $\dim(D) = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p})$, l'égalité

$$\dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big) + \mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) = \dim(D) + n = \dim\big(D[n]\big).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Si $D[n]$ est coéquidimensionnel (a fortiori s'il est taut-level), alors D est un anneau de Hilbert (tout idéal maximal de $D[n]$ est de hauteur $\dim(D)+n$. Il se contracte nécessairement en un idéal de hauteur $\dim(D)$, a fortiori en un idéal maximal). On laisse au lecteur le soin de vérifier que D est aussi coéquidimensionnel. Supposons enfin que $D[n]$ est taut-level et considérons un idéal premier $\mathfrak{p}$ de D. Par hypothèse on a

$$\dim\big(D[n]/\mathfrak{p}[n]\big) + \mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{p}[n]) = \dim\big(D[n]\big).$$

Comme D est noethérien, donc localement de Jaffard, on a

$$\mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{p}[n]) = \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}), \dim\big(D[n]\big) = \dim(D)+n \text{ et } \dim\big(D[n]/\mathfrak{p}[n]\big) = \dim(D/\mathfrak{p})+n.$$

On tire

$$\dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) = \dim(D). \ \diamond$$

Par contre, sous les mêmes hypothèses, toute D-algèbre de type fini n'est pas nécessairement coéquidimensionnelle [6, Example 3.13]. Dans le cas intègre, on obtient évidemment des conclusions plus fortes en supposant que D vérifie la formule de la dimension. A ce sujet, on établit d'abord le résultat suivant qui complète le théorème 4.1.

Théorème 4.3. *Soit D un anneau intègre noethérien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est un anneau de Hilbert et vérifie la formule de la dimension,*
(ii) *pour toute D-algèbre intègre de type fini R contenant D et pour tout premier $\mathfrak{q}$ de R, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$, on a*

$$\dim(R/\mathfrak{q}) + \mathrm{ht}_R\mathfrak{q} = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[R : D].$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si D vérifie la formule de la dimension, on a

$$\mathrm{ht}_R\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : D/\mathfrak{p}] = \mathrm{ht}_D\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[R : D]. \tag{1}$$

Par ailleurs, si D est un anneau de Hilbert, alors $D/\mathfrak{p}$ est un anneau noethérien de radical dimensionnel nul [Théorème 2.1] et $R/\mathfrak{q}$ est une $D/\mathfrak{p}$ algèbre de type fini contenant $D/\mathfrak{p}$. On a donc [Théorème 1.2]

$$\dim(R/\mathfrak{q}) = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : D/\mathfrak{p}]. \tag{2}$$

On obtient la relation voulue, en additionnant membre à membre (1) et (2) et en simplifiant.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Il résulte en particulier de l'hypothèse que, pour tout entier n et tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $D[n]$, on a

$$\dim\big(D[n]/\mathfrak{P}\big) + \mathrm{ht}_{D[n]}(\mathfrak{P}) = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D(\mathfrak{p}) + n.$$

On tire donc du théorème 4.1 que D est un anneau de Hilbert. En combinant la relation (2) avec la relation de l'hypothèse (pour toute D-algèbre R de type fini et tout premier $\mathfrak{q}$ de R), on tire cette fois la relation (1) qui exprime que D vérifie la formule de la dimension. $\diamond$

Rappelons que, pour un anneau (intègre) noethérien D, les assertions suivantes sont équivalentes [13, Theorem 3.6]

(i) D vérifie la formule de la dimension,
(ii) D est universellement caténaire (pour tout entier $n, D[n]$ est caténaire),
(iii) $D[X]$ est caténaire,

De manière similaire au corollaire 4.2, on tire alors le résultat suivant.

Corollaire 4.4. *Soit D un anneau intègre noethérien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est un anneau de Hilbert coéquidimensionnel vérifiant la formule de la dimension,*
(ii) *toute D-algèbre de type fini est caténaire et coéquidimensionnelle,*
(iii) *$D[X]$ est caténaire et coéquidimensionnel.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soient R une D-algèbre de type fini et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de R. Comme D est un anneau de Hilbert vérifiant la formule de la dimension, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$, il résulte du théorème 4.3 qu'on a

$$\dim(R/\mathfrak{q}) + \mathrm{ht}_R\mathfrak{q} = \dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[R : D].$$

Par ailleurs, comme D vérifie la formule de la dimension, alors il est universellement caténaire, ainsi qu'on l'a rappelé ci-dessus, et s'il est coéquidimensionnel, alors il est aussi taut-level. On tire

$$\dim(D/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_D\mathfrak{p} = \dim(D).$$

Comme D est de Hilbert, on a aussi

$$\dim(R) = \dim(D) + \mathrm{d.t.}[R : D].$$

On conclut qu'on a

$$\dim(R/\mathfrak{q}) + \mathrm{ht}_R\mathfrak{q} = \dim(R).$$

Finalement R est taut-level, donc en particulier coéquidimensionnel. Comme D est universellement caténaire, on tire aussi que R est caténaire.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Il résulte du corollaire 4.2 que, si $D[X]$ est coéquidimensionnel, alors D est un anneau de Hilbert coéquidimensionnel ; si par ailleurs $D[X]$ est caténaire, on sait que D vérifie la formule de la dimension [13, Theorem 3.6]. $\diamond$

Remarque 4.5. Comme les anneaux noethériens de dimension 1 sont coéquidimensionnels et vérifient la formule de la dimension, on voit en particulier que, si D est un anneau noethérien de dimension 1 avec une infinité d'idéaux maximaux (donc de Hilbert), alors toute D-algèbre de type fini est caténaire et coéquidimensionnelle.

References

[1] D. F. Anderson, A. Bouvier, D. E. Dobbs, M. Fontana and S. Kabbaj, On Jaffard domains. *Expo. Math.* **5**, (1988) 145–175.

[2] A. Ayache et P.-J. Cahen, Radical valuatif et sous-extensions. *A paraître.*

[3] P.-J.Cahen, Couples d'anneaux partageant un idéal. *Archiv der Math.* **51**, (1988) 505–514.

[4] M.Fontana, Topologically defined classes of commutative rings. *Annali di Matematica pura ed applicata* **123**, (1980) 331–355.

[5] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory.* Marcel Dekker, New York, 1974.

[6] R. Gilmer, B. Nashier and W. Nichols, The prime spectra of subalgebras of affine algebras and their localizations *J. of Pure and Applied Algebra* **57**, (1989) 47–65.

[7] J. M. Giral, Krull dimension, transcendence degree and subalgebras of finitely generated algebras. *Archiv der Math.* **36**, (1981) 305–312.

[8] P. Jaffard, *Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes.* Gauthiers-Villars, Paris, 1960.

[9] S.Kabbaj, La formule de la dimension pour les S-domaines forts universels. *Bolletino U.M.I.* **5 (6-D)**, (1986) 145–161.

[10] I. Kaplansky, *Commutative rings.* The University of Chicago press, Chicago and London, 1974.

[11] N. Onoda, Subrings of generated rings over a pseudo-geometric ring. *Japan J. of Math.* **10**, (1984), 29–53.

[12] N. Onoda et K. Yoshida, On Noetherian subrings of an affine domain. *Hiroshima Math. J.* **12**, (1982), 377–384.

[13] L. J. Ratlif, On quasi-unmixed local domains, the altitude formula and chain conditions for prime ideals I. *Amer. J. Math.* **91**, (1969), 508–528.

[14] K. Yoshida, On birational-integral extension of rings and prime ideals of depth one. *Japan J. of Math.* **8**, (1982), 49–57.

Ahmed AYACHE, Poste de l'ancienne Université, B. P. 12460 - Sanaa, République du Yemen

Paul-Jean CAHEN, Case Cr.A, Faculté des Sciences de Saint Jérôme, 13397 Marseille cedex 20 FRANCE