Radical valuatif et sous-extensions

Ahmed Ayache et Paul-Jean Cahen

Abstract. Si D est un anneau intègre, on considère les sous-extensions de D-algèbres de type fini, notamment les anneaux compris entre D et l'anneau de polynômes $D[n]$ en n indéterminées. Au préalable on montre qu'une extension de type fini $R \subseteq T$, où T est noethérien, vérifie l'inégalité de la dimension. Puis on étudie les radicaux dimensionnels et valuatifs d'un anneau (respectivement intersection des idéaux maximaux de plus grande hauteur et des idéaux maximaux de plus grande hauteur valuative). On montre ensuite que, si D est un anneau de Jaffard, tous les anneaux compris entre D et $D[n]$ sont de Jaffard. Il en est de même des sous-extensions de D-algèbres de type fini lorsqu'en outre le radical dimensionnel de D est nul. On conclut avec les sous-extensions d'un corps k. Si tout idéal premier d'une sous-extension R se relève dans une k-algèbre de type fini contenant R, on montre que R est localement et résiduellement de Jaffard. Lorsque toute chaîne de R se relève dans une telle extension, on montre que R est totalement de Jaffard.

AMS Subject classification (1991): Primary: 13C05, 13F05, 13F20; Secondary: 13B24, 13G05, 13B22, 13B30, 13F30.

Mots clefs : Sous-extensions, dimension de Krull, dimension valuative, anneaux de Jaffard.

A.Ayache: Poste de l'ancienne Université, B. P. 12460 - Sanaa République du Yemen

P.J. Cahen: Case Cr.A, Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, 13397 Marseille cedex 20, France

Aknowledgment. Les auteurs remercient le referee pour ses nombreux et précieux commentaires.

Introduction

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires, le plus souvent intègres et de dimension de Krull finie (on note parfois A un anneau, on préfère le noter D lorsqu'il est intègre, on note alors K son corps des fractions). On note $D[n]$ l'anneau de polynômes en n indéterminées sur D. Dans ce travail, on s'intéresse aux anneaux compris entre D et l'anneau de polynômes $D[n]$ et plus généralement entre D et une D-algèbre intègre de type fini. On pose la définition suivante :

Définition 1 *Soit D un anneau intègre. On dit que R est une* sous-extension *de D s'il existe une D-algèbre intègre de type fini T telle que $D \subseteq R \subseteq T$. Si $T = D[n]$, on dit que R est une* sous-extension polynomiale.

On étudie la dimension de Krull et la dimension valuative des sous-extensions ainsi que des conditions pour qu'ils soient de Jaffard (on rappelle les définitions ci-dessous), améliorant et généralisant des résultats de [10], [13] et [17]. Cette étude trouve donc pour bonne part ses motivations dans les travaux de D.F. Anderson, A. Bouvier, D.E. Dobbs et S. Kabbaj sur les anneaux de Jaffard liés à la formule de la dimension et diverses conditions de caténarité (comme [1], [5], [6], [14]).

Considérant une extension $D \subseteq T$ (où T est intègre), on note d.t.$[T : D]$ le degré de transcendance du corps des fractions de T sur celui de D ; dans le cas où d.t.$[T : D] = 0$, on dit que T est une *extension algébrique* de D ; lorsque T est contenu dans le corps des fractions de D, on dit que T est un *suranneau* de D. On note ht$\mathfrak{p}$ la hauteur d'un idéal premier $\mathfrak{p}$. Si T est intègre, on dit que l'extension $D \subseteq T$ vérifie *l'inégalité de la dimension* lorsque, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de T, notant $\mathfrak{p}$ l'intersection $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$, on a l'inégalité

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : D/\mathfrak{p}] \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[T : D].$$

On dit que cette extension vérifie *la formule de la dimension* lorsqu'il y a égalité. Il est classique, d'après le Lemme de normalisation d'Emmy Noether, qu'une extension (intègre) de type fini d'un corps K vérifie la formule de la dimension [16, (14.6)]. On sait aussi que l'extension $D \subseteq T$ vérifie l'inégalité de la dimension dès lors que D est noethérien (sans restriction de finitude) [15, (15.5)]. Dans un premier paragraphe on établit qu'elle vérifie encore l'inégalité de la dimension si on suppose cette fois que c'est l'anneau T qui est noethérien et qu'en outre l'extension est de type fini.

Si A est un anneau, on note dim$A$ sa dimension de Krull et $\mathrm{dim_v}A$ sa dimension valuative (qu'on peut définir comme la limite — éventuellement infinie — de la suite dim$A[n]-n$). Si A est de dimension finie, rappelons qu'on dit qu'il est de *Jaffard* si $\mathrm{dim}A = \mathrm{dim_v}A$ (ou de manière équivalente, $\mathrm{dim}A[n] = \mathrm{dim}A + n$ pour tout entier n) [1], qu'il est *localement* (resp. *résiduellement*) de Jaffard si le localisé $A_\mathfrak{p}$ (resp. le quotient $A/\mathfrak{p}$) en tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est de Jaffard et enfin qu'il est *totalement* de Jaffard si tout quotient de A est localement de Jaffard (ou tout localisé est résiduellement de Jaffard). Dans un second paragraphe, on s'intéresse à la dimension de Krull d'une sous-extension polynomiale d'un anneau intègre D, soit d'un anneau R compris entre D entre $D[n]$. On établit l'inégalité $\mathrm{dim}R \geq \mathrm{dim}D + \mathrm{d.t.}[R : D]$. Puis on montre que, si D est de Jaffard, alors R est de Jaffard. On peut conclure que, si D est noethérien et R est de la forme $R = D + I$, où I est un idéal de $D[n]$ au-dessus d'un idéal maximal de D, alors R est localement de Jaffard.

Avant de poursuivre l'étude des sous-extensions, on établit au troisième paragraphe des résultats généraux sur certains radicaux d'un anneau (qu'il n'est pas nécessaire ici de supposer intègre). Ils nous seront utiles pour la suite. La hauteur d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A peut s'interpréter comme la dimension de Krull du localisé $A_\mathfrak{p}$. On a introduit de même la *hauteur valuative* de $\mathfrak{p}$, notée $\mathrm{ht_v}\mathfrak{p}$, comme étant la *dimension valuative* de $A_\mathfrak{p}$ [3]. Rappelant que le *radical dimensionnel* de A, noté $\mathrm{Rad_d}(A)$, est l'intersection des idéaux premiers de hauteur maximale [13], on définit de manière analogue le *radical valuatif*, noté $\mathrm{Rad_v}(A)$ comme l'intersection des idéaux premiers de hauteur *valuative* maximale. Ces deux radicaux contiennent le radical de Jacobson, le second est inclus dans le premier lorsque A est de Jaffard, ils coïncident si A est localement de Jaffard ; on donne cependant des exemples où ils sont incomparables. Supposant A de dimension de Krull finie (resp. de dimension valuative finie), on montre qu'un élément f de A appartient au radical dimensionnel (resp. au radical valuatif) de A si et seulement si le localisé A_f vérifie l'inégalité $\dim A_f < \dim A$ (resp. $\dim_{\mathrm{v}} A_f < \dim_{\mathrm{v}} A$). Pour les anneaux de polynômes on montre qu'on a toujours $\mathrm{Rad_v}(A)[n] = \mathrm{Rad_v}\big(A[n]\big)$ tandis que la situation est plus complexe pour le radical dimensionnel (on l'illustre par des exemples). Considérant enfin une extension entière B de A, on montre que les divers radicaux de A sont la trace de ceux de B.

Au quatrième paragraphe on revient à un anneau intègre D. On montre que $\mathrm{Rad_d} D = (0)$, si et seulement si, pour toute sous-extension R de D, on a l'inégalité $\dim R \geq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$. De même, $\mathrm{Rad_v} D = (0)$ si et seulement si, pour toute sous-extension, on a $\dim_{\mathrm{v}} R = \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]$ (pour la dimension valuative, on a toujours $\dim_{\mathrm{v}} R \leq \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]$). On caractérise alors les anneaux de Jaffard de radical dimensionnel nul : on établit l'équivalence entre diverses propriétés et notamment les suivantes.
(i) D est de Jaffard et $\mathrm{Rad_d} D = (0)$,
(ii) $\mathrm{Rad_v} D = (0)$ et toute sous-extension de D est de Jaffard,
(iii) pour toute sous-extension R de D, on a $\dim R = \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$,
(iv) pour tout suranneau de type fini R de D, on a $\dim R = \dim D$.

Au dernier paragraphe on étudie les sous-extensions d'un corps k, reprenant et complétant des travaux de A. Wadsworth [18]. Il résulte du paragraphe précédent que ce sont des anneaux de Jaffard. On montre que l'extension $k \subseteq R$ vérifie l'égalité de la dimension si et seulement si, par tout idéal premier de R, passe une chaîne de longueur maximale. Dans ces conditions R est alors coéquidimensionnel, résiduellement et localement de Jaffard. Pour cela il suffit que tout idéal premier de R se relève dans une k-algèbre de type fini. On montre aussi que R est caténaire et coéquidimensionnel si et seulement si l'extension $k \subseteq R$ vérifie *résiduellement* l'égalité de la dimension (c'est à dire que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, l'extension $k \subseteq R/\mathfrak{p}$ vérifie l'égalité de la dimension). Dans ces conditions R est alors totalement de Jaffard. On retrouve que c'est en particulier le cas des anneaux de la forme $R = k + I$, où I est un idéal non nul d'une k-algèbre de type fini [2, Proposition 1.4].

Dans ce travail, on considère souvent des généralisations de la très classique construction $D+M$ (notamment des sous-extensions de la forme $D+I$). Il existe une abondante littérature à leur sujet et on peut renvoyer tout particulièrement le lecteur à l'article fondateur de Marco Fontana [11]. Par ailleurs, certaines propriétés et exemples particuliers ici utilisés sont décrits en [8] et [9].

1 Inégalité de la dimension

Dans ce paragraphe on considère une extension $R \subseteq T$ d'anneaux intègres. Ainsi qu'on l'a rappelé en introduction, on sait qu'elle vérifie l'inégalité de la dimension lorsque R est noethérien [15, (15.5)]. On montre qu'il en est de même pour une extension de type fini, si T est noethérien. Sans condition de finitude, on établit au préalable une inégalité plus faible .

Lemme 1.1 *Soit $R \subseteq T$ une extension où T est (intègre) noethérien. Pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de T, posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$, on a alors* $\mathrm{ht}\mathfrak{q} \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[T : R]$. *Si en particulier l'extension est algébrique, on a donc* $\mathrm{ht}\mathfrak{q} \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p}$.

Démonstration. Quitte à localiser, on suppose que T est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{q}$. En particulier on a alors $\mathrm{ht}\mathfrak{q} = \dim T$.
Cas où $\mathfrak{p} = (0)$. Quitte à localiser de nouveau (cette fois par rapport à $\mathfrak{p}$), on peut supposer que R est un corps. Ainsi qu'il résulte du théorème du Nullstellensatz de Hilbert, il est bien connu qu'on a alors l'inégalité $\dim T \leq \mathrm{d.t.}[T : R]$ (et même l'égalité pour les extensions de type fini [15, (5.6)]).
Cas général. On fait une récurrence sur $h = \mathrm{ht}\mathfrak{q}$. Si $h = 0$, soit $\mathfrak{q} = (0)$, alors $\mathfrak{p} = (0)$ et on est ramené au cas précédent. Si $\mathfrak{p} \neq (0)$, on note z un élément non nul de $\mathfrak{p}$. Puisque T est noethérien de dimension h, l'intersection des idéaux premiers de hauteur $h-1$ de T est nulle [13, lemme 1.3]. Il existe donc un idéal premier $\mathfrak{q}'$ de hauteur $h-1$ dans T ne contenant pas z. Ainsi $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}' \cap R$ est strictement contenu dans $\mathfrak{p}$. Par récurrence, on a

$$h - 1 = \mathrm{ht}\mathfrak{q}' \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p}' + \mathrm{d.t.}[T : R],$$

d'où le résultat (puisque $\mathrm{ht}\mathfrak{p}' \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p} - 1$). $\diamond$

Théorème 1.2 *Une extension de type fini $R \subseteq T$ (d'anneaux intègres), où T est noethérien, vérifie l'inégalité de la dimension.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de T et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$. Quitte à localiser, on suppose que R est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ (donc que le quotient $R/\mathfrak{p}$ est un corps). On a $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}_1$, où $\mathfrak{q}_1$ est maximal et nécessairement au-dessus de $\mathfrak{p}$. On a immédiatement

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}\mathfrak{q}_1. \tag{1}$$

Par ailleurs, comme $R/\mathfrak{p}$ est un corps et que $T/\mathfrak{q}$ est une $R/\mathfrak{p}$-algèbre de type fini, l'extension $R/\mathfrak{p} \subseteq T/\mathfrak{q}$ vérifie la formule de la dimension [16, (14.6)], soit

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}) + \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q}_1 : R/\mathfrak{p}] = \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}]. \tag{2}$$

Comme $T/\mathfrak{q}_1$ est aussi une $R/\mathfrak{p}$-algèbre de type fini et que $\mathfrak{q}_1$ est maximal, il résulte du théorème du Nullstellensatz de Hilbert que $T/\mathfrak{q}_1$ est une extension algébrique de $R/\mathfrak{p}$ [15, (5.2)], soit $\mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q}_1 : R/\mathfrak{p}] = 0$. De (2) on tire donc l'égalité $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}) = \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}]$. Reportant dans (1), on obtient

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}] \leq \mathrm{ht}\mathfrak{q}_1.$$

Du lemme précédent (appliqué à l'idéal $\mathfrak{q}_1$) on tire finalement

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}] \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[T : R]. \diamond$$

Remarque 1.3 Comme le montrent les exemples qui suivent, les hypothèses du théorème précédent sont essentielles. Avec les mêmes notations, on ne peut omettre de supposer que l'extension $R \subseteq T$ est de type fini ; même si elle est de type fini, il ne suffit pas que T soit localement de Jaffard pour avoir ne serait-ce que l'inégalité du lemme 1.1 (rappelons pourtant que, si R est localement de Jaffard, toutes les extensions de R vérifient l'inégalité de la dimension [3, Théorème 1.5]).

Exemple 1.4 *Une extension $R \subseteq T$, où T est noethérien, mais qui ne vérifie pas l'inégalité de la dimension (n'étant pas de type fini).*
Soient k un corps, K une extension transcendante de k et $T = K[[t]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans K (qui est bien évidemment noethérien). On considère alors l'anneau $R = k + tK[[t]]$. C'est un cas particulier de la construction $D+M$, dont les propriétés sont rappelées dans [4]. Il en résulte que les anneaux R et T partagent l'idéal $\mathfrak{p} = tK[[t]]$, que cet idéal est de hauteur 1 dans chacun d'eux et que ces anneaux ont même corps des fractions, en particulier $\mathrm{d.t.}[T : R] = 0$. Si on note $\mathfrak{q}$ l'idéal $\mathfrak{p}$ lorsqu'on le considère comme un idéal de T, on a $\mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}] = \mathrm{d.t.}[K : k] > 0$. On tire

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[T/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}] > \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[T : R] = 1.$$

Ainsi l'extension $R \subseteq T$ ne vérifie pas l'inégalité de la dimension (d'après le théorème précédent, elle n'est donc pas de type fini). On peut aussi noter que R n'est pas un anneau de Jaffard, puisque $\dim(R) = 1$ et $\dim_v(R) \geq 2$ [4, theorem 2.1].

Exemple 1.5 *Une extension de type fini $R \subseteq T$, où T est localement de Jaffard, mais qui ne vérifie pas l'inégalité de la dimension.*
De manière analogue à l'exemple précédent, soient k un corps, $K = k(u)$ le corps des fractions rationnelles et $T_1 = K[[t]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans K. On considère alors les anneaux $R = k + tK[[t]]$ et $T = k[u] + tK[[t]]$. Comme précédemment, les anneaux R et T s'obtiennent à partir de T_1 au moyen de la construction $D + M$. On en déduit les faits suivants [4, theorem 2.1]: les trois anneaux R, T et T_1 partagent l'idéal premier $\mathfrak{p} = tK[[t]]$ qui est de hauteur 1 dans chacun d'eux, ils ont même corps des fractions, R est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ et de dimension $1, T$ est de dimension 2. Enfin, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de hauteur 2 dans T, alors $\mathfrak{q}$ contient $\mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$, et on a

$$2 = \mathrm{ht}\mathfrak{q} > \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[T : R] = 1.$$

Ainsi l'extension $R \subseteq T$ ne vérifie pas l'inégalité de la dimension. Néanmoins il est clair que $T = R[u]$ est une R-algèbre de type fini. Enfin T est localement de Jaffard, d'après [9, Proposition 4, Corollaire], puisque T et T_1 partagent l'idéal $\mathfrak{p}, T_1 = K[[t]]$ est localement de Jaffard (c'est un anneau de valuation), $T/\mathfrak{p} = k[u]$ est localement de Jaffard (il est noethérien) et $T_{\mathfrak{p}} = T_1$ est un anneau de Jaffard.

2 Sous-extensions polynomiales

Dans ce paragraphe, D désigne un anneau intègre de corps des fractions K. On s'intéresse aux anneaux compris entre D et l'anneau de polynômes $D[n]$. Au préalable on ramène l'étude d'un anneau R compris entre D et $D[\Omega]$, où Ω est un ensemble d'indéterminées, au cas de d indéterminées où $d = \text{d.t.}[R : D]$, en précisant un résultat de Paul Eakin [10, Lemma B].

Proposition 2.1 *Soient D un anneau intègre, Ω un ensemble d'indéterminées et R un anneau compris entre D et $D[\Omega]$ tel que le degré de transcendance $d = \text{d.t.}[R : D]$ soit fini. Il existe alors d indéterminées $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d$ et un D-homomorphisme*

$$\phi : D[\Omega] \to D[Y_1, Y_2, \ldots, Y_d]$$

qui induit un isomorphisme sur R.

Démonstration. Soit d'abord $f_1, f_2, \ldots, f_d$ une base de transcendance de R sur D. Dans leur ensemble les polynômes de cette base ne font intervenir qu'un nombre fini d'indéterminées, disons n. Tout autre polynôme f de R ne fait alors intervenir que les mêmes n indéterminées, sinon la famille $(f, f_1, f_2, \ldots, f_d)$ serait algébriquement libre. On peut donc considérer que R est inclus dans un anneau de polynômes $D[n]$ (où $n \geq d$) et le morphisme de $D[\Omega]$ dans $D[n]$ qui annule toutes les autres indéterminées induit un isomorphisme sur R. On montre maintenant qu'on peut en fait considérer R comme un sous-anneau de $D[d]$. En effet, notant S la partie complémentaire de 0 dans D, on peut considérer que le localisé $S^{-1}R$ est compris entre K et $K[n]$ (où K désigne le corps des fractions de D). Ainsi qu'on l'a noté plus haut, il résulte du Nullstellensatz de Hilbert que $\dim S^{-1}R \leq d = \text{d.t.}[S^{-1}R : K]$. Il résulte donc de [10, Lemma B] qu'il existe d indéterminées $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d$ et un K-homomorphisme

$$\phi : K[n] \to K[Y_1, Y_2, \ldots, Y_d]$$

qui induit un isomorphisme sur $S^{-1}R$. On obtient le résultat en considérant la restriction de ce morphisme à $D[n]$. $\diamond$

Remarques 2.2 1) Si D est de dimension valuative finie, l'hypothèse sur la finitude du degré de transcendance de R dans la proposition précédente implique que R est également de dimension valuative finie, donc a fortiori de dimension de Krull finie. Dans ce cas on pourrait aussi appliquer un premier résultat de Paul Eakin [10, Lemma A] pour déduire que R est contenu dans un anneau de polynômes $D[n]$ (en un nombre fini d'indéterminées).
2) Dans le cas d'un anneau R compris entre un corps k et l'anneau de polynômes $k[\Omega]$, on a l'égalité $\dim R = \text{d.t.}[R : k]$ [10, Theorem 2].

On s'intéresse tout d'abord à la dimension valuative d'une sous-extension polynomiale.

Proposition 2.3 *Soient D un anneau intègre et R une sous-extension polynomiale de D. Alors $\dim_{\mathrm{v}} R = \dim_{\mathrm{v}} D + \text{d.t.}[R : D]$.*

Démonstration. On pose $d = \mathrm{d.t.}[R : D]$. On a toujours *l'inégalité de la dimension valuative*

$$\dim_{\mathrm{v}} R \leq \dim_{\mathrm{v}} D + d. \tag{1}$$

En effet, ce résultat bien connu pour les extensions de type fini [12, (30.11)] se généralise sans peine à toute extension [3, Lemme 1.1]. D'après la Proposition 2.1, on peut considérer R comme un anneau compris entre D et $D[d]$. Comme $D[d]$ est une extension de R, on a de même

$$\dim_{\mathrm{v}} D[d] \leq \dim_{\mathrm{v}} R + \mathrm{d.t.}[D[d] : R].$$

Comme $D[d]$ est algébrique sur R et que $\dim_{\mathrm{v}} D[d] = \dim_v D + d$, on obtient l'inégalité inverse de (1). $\diamond$

On s'intéresse ensuite à la dimension de Krull.

Proposition 2.4 *Soient D un anneau intègre et R une sous-extension polynomiale de D. Alors $dim R \geq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$.*

Démonstration. On pose $d = \mathrm{d.t.}[R : D]$. Par hypothèse, R est contenu dans un anneau de polynômes $D[n]$, on note alors $\mathfrak{P}$ l'idéal de R formé des polynômes de terme constant nul, soit

$$\mathfrak{P} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \cap R = \{f \in R \mid f(0) = 0\}.$$

On vérifie aisément que $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de R au-dessus de (0) et que $R/\mathfrak{P} \simeq D$. On montre d'abord qu'on a

$$\mathrm{ht}\mathfrak{P} = d = \mathrm{d.t.}[R : D]. \tag{1}$$

En effet, quitte à localiser par rapport à la partie multiplicative complémentaire de 0 dans D, on peut supposer que D est un corps. Dans ces conditions, $D[n]$ est noethérien et l'extension $R \subseteq D[n]$ vérifie l'inégalité de la dimension [Théorème 1.2]. En particulier, pour l'idéal $\mathfrak{Q} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de $D[n]$ on a

$$\mathrm{ht}\mathfrak{Q} + \mathrm{d.t.}[D[n]/\mathfrak{Q} : R/\mathfrak{P}] \leq \mathrm{ht}\mathfrak{P} + \mathrm{d.t.}[D[n] : R]. \tag{2}$$

Par ailleurs, il est clair que $\mathfrak{Q}$ est de hauteur n, que $D[n]/\mathfrak{Q}$ et $R/\mathfrak{P}$ sont tous deux isomorphes à D et enfin que $\mathrm{d.t.}[D[n] : R] = n - d$. De la relation (2) on tire donc la minoration $d \leq \mathrm{ht}\mathfrak{P}$. Ainsi qu'on l'a déjà noté, il est par ailleurs bien connu que $\dim R \leq d = \mathrm{d.t.}[R : D]$ (puisqu'on suppose que D est un corps). On a donc a fortiori la majoration $\mathrm{ht}\mathfrak{P} \leq d$, et l'égalité (1) est établie.

D'autre part on a l'inégalité

$$\dim R \geq \dim(R/\mathfrak{P}) + \mathrm{ht}\mathfrak{P}. \tag{3}$$

On tire le résultat en combinant (1) et (3), puisque $R/\mathfrak{P} \simeq D$. $\diamond$

Si D est un anneau de Jaffard, soit $\dim D = \dim_{\mathrm{v}} D < \infty$, il résulte des Propositions 2.3 et 2.4 ci-dessus qu'on a l'inégalité $\dim R \geq \dim_{\mathrm{v}} R$. Comme l'inégalité inverse est toujours vérifiée, on a le théorème suivant.

Théorème 2.5 *Soient D un anneau intègre et R une sous-extension polynomiale de D. Si D est un anneau de Jaffard, alors* $\dim R = \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$ *et R est un anneau de Jaffard.*

Remarques 2.6 Dans la même situation, mais sans supposer D de Jaffard, on peut faire les remarques suivantes.
1) Le localisé $R_{\mathfrak{P}}$ de R en l'idéal premier $\mathfrak{P}$ considéré dans la démonstration de la Proposition 2.4 est toujours un anneau de Jaffard. Posant $d = \mathrm{d.t.}[R : D]$, on a vu en effet que $\mathrm{ht}\mathfrak{P} = d$, or $R_{\mathfrak{P}}$ est une extension du corps des fractions K de D, donc $\mathrm{ht_v}\mathfrak{P} = \dim_{\mathrm{v}} R_{\mathfrak{P}} \leq d$. On conclut que $\dim R_{\mathfrak{P}} = \dim_{\mathrm{v}} R_{\mathfrak{P}} = d$.
2) Si D est de dimension valuative finie, on sait que $D[m]$ est de Jaffard, pour $m \geq \dim_{\mathrm{v}} D - 1$ [1, Proposition 1.2]. On tire alors du Théorème 2.5 que $R[m]$ est un anneau de Jaffard pour $m \geq \dim_{\mathrm{v}} D - 1$, puisque que c'est une sous-extension polynomiale de $D[m]$.
3) Si D n'est effectivement pas de Jaffard, alors R n'est pas résiduellement de Jaffard, puisque le quotient $R/\mathfrak{P}$ est isomorphe à D. A fortiori R n'est ni S-fort universel, ni universellement caténaire [5, Theorem 2.4 & Theorem 5.1].

Lorsque D est noethérien on a en particulier le résultat suivant.

Proposition 2.7 *Soient D un anneau intègre et R un anneau compris entre D et l'anneau de polynômes $D[n]$ (c'est à dire une sous-extension polynomiale de D). Si D est noethérien et si tout idéal premier de R se relève dans $D[n]$, alors l'extension $D \subseteq R$ vérifie la formule de la dimension et R est localement de Jaffard.*

Démonstration. On a les inclusions $D \subseteq R \subseteq D[n]$ où les extensions $D \subseteq R$ et $R \subseteq D[n]$ vérifient l'inégalité de la dimension (la première tout simplement parce que D est noethérien, la seconde en appliquant le Théorème 1.2, puisque $D[n]$ est également noethérien). D'autre part, si D est noethérien, il est localement de Jaffard, donc l'extension $D \subseteq D[n]$ vérifie la formule de la dimension [14, Lemme 1.4]. Si tout idéal premier de R se relève dans $D[n]$, il résulte alors du Lemme 3.1 (iii) de [3] que l'extension $D \subseteq R$ vérifie la formule de la dimension. On peut alors aussi conclure que R est localement de Jaffard en vertu du lemme suivant. $\diamond$

Lemme 2.8 *Soit $D \subseteq R$ une extension d'anneaux intègres. Si cette extension vérifie la formule de la dimension et si D est localement de Jaffard, alors R est localement de Jaffard.*

Démonstration. Pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de R, notant $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap D$, on a par hypothèse la relation

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : D/\mathfrak{p}] = \mathrm{ht}\mathfrak{p} + dt[R : D]. \tag{1}$$

Par ailleurs on a toujours l'inégalité [3, Théorème 1.3]

$$\mathrm{ht_v}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : D/\mathfrak{p}] \leq \mathrm{ht_v}\mathfrak{p} + dt[R : D]. \tag{2}$$

Comme D est localement de Jaffard, alors $\mathrm{ht}\mathfrak{p} = \mathrm{ht}_{\mathrm{v}}\mathfrak{p}$. Des relations (1) et (2) on tire donc l'inégalité $\mathrm{ht}_{\mathrm{v}}\mathfrak{q} \leq \mathrm{ht}\mathfrak{q}$, donc en fait l'égalité $\mathrm{ht}_{\mathrm{v}}\mathfrak{q} = \mathrm{ht}\mathfrak{q}$ (puisque l'inégalité inverse est toujours vérifiée). Par définition, ceci prouve que R est localement de Jaffard. $\diamond$

Pour finir, on considère des anneaux de la forme $R = D+I$, où I est un idéal non nul de l'anneau de polynômes $D[n]$ (D est toujours un anneau intègre). Il s'agit là d'une généralisation de la construction $D+M$ et on note en particulier que le corps des fractions de R est égal au corps des fractions de $D[n]$ donc que d.t.$[R : D] = n$.

Proposition 2.9 *Soient D un anneau intègre et R un anneau de la forme $R = D+I$, où I est un idéal non nul de $D[n]$. Alors* $\mathrm{dim}R$ *vérifie l'encadrement* $\mathrm{dim}D + n \leq \mathrm{dim}R \leq \mathrm{dim}D[n]$.

Démonstration. On pose $r = \mathrm{dim}R$. La minoration $\mathrm{dim}D + n \leq r$, résulte de la Proposition 2.4. Il reste à établir l'inégalité inverse. Pour cela on considère une chaîne maximale de R, soit

$$(0) \subset \mathfrak{P}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{P}_h \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_r.$$

Si aucun idéal premier de la chaîne ne contient I, celle-ci se relève toute entière dans $D[n]$ [11, (1.4)]. Alors $r \leq \mathrm{dim}D[n]$, comme voulu. Sinon, on note h le plus petit indice tel que $\mathfrak{P}_h$ contienne I et on pose $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_h \cap D$. La chaîne $(0) \subset \mathfrak{P}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{P}_h$ se relève dans $D[n]$ [8, Proposition 4], et même dans $D_{\mathfrak{p}}[n]$. Donc

$$h \leq \mathrm{dim}\big(D_{\mathfrak{p}}[n]\big). \tag{1}$$

Par ailleurs la chaîne $\mathfrak{P}_h \subset \cdots \subset \mathfrak{P}_r$ correspond à une chaîne du quotient $R/\mathfrak{P}_h$, or $R/\mathfrak{P}_h \simeq D/\mathfrak{p}$ (puisque $\mathfrak{P}_h$ contient I), donc

$$r - h \leq \mathrm{dim}\big(D/\mathfrak{p}\big). \tag{2}$$

Ajoutant membre à membre les relations (1) et (2), on tire

$$r \leq \mathrm{dim}\big(D_{\mathfrak{p}}[n]\big) + \mathrm{dim}\big(D/\mathfrak{p}\big). \tag{3}$$

Enfin, comme $D_{\mathfrak{p}}$ est local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$, on tire du théorème de la "chaîne spéciale" [7, Corollary 3] la relation

$$\mathrm{dim}\big(D_{\mathfrak{p}}[n]\big) = \mathrm{ht}\big(\mathfrak{p}[n]\big) + n. \tag{4}$$

En combinant (3) et (4), on a pour conclure

$$r \leq \mathrm{ht}\big(\mathfrak{p}[n]\big) + n + \mathrm{dim}\big(D/\mathfrak{p}\big) \leq \mathrm{ht}\big(\mathfrak{p}[n]\big) + \mathrm{dim}\big(D/\mathfrak{p}\big)[n] \leq \mathrm{dim}D[n]. \ \diamond$$

Si D est un anneau de Jaffard, on retrouve alors le fait que R l'est aussi [Théorème 2.5]. On peut donner l'exemple suivant, qui généralise un peu le cas particulier où D est un corps [2, Exemple 1.5].

Exemple 2.10 Soit D un anneau de Jaffard et X, Y deux indéterminées, alors l'anneau $R = D[\{XY^n \mid n \geq 0\}]$ est de Jaffard et $\dim R = \dim D + 2$.

Enfin, si l'idéal I est au-dessus d'un idéal maximal de D, alors tout idéal de R se relève dans $D[n]$ [8, Proposition 4]. Si en outre D est noethérien, on tire donc le corollaire suivant de la Proposition 2.7.

Corollaire 2.11 *Soient D un anneau intègre noethérien et R un anneau de la forme $R = D + I$, où I est un idéal de $D[n]$ au-dessus d'un idéal maximal de D. Alors R est localement de Jaffard.*

3 Radical dimensionnel et radical valuatif

Dans toute cette partie on considère un anneau A que, suivant les cas, on suppose de dimension de Krull ou de dimension valuative finie, mais qu'on ne suppose pas nécessairement intègre. Si A est de dimension de Krull finie, on rappelle que son *radical dimensionnel*, noté $\mathrm{Rad_d}(A)$, est l'intersection des idéaux premiers de hauteur maximale [13], soit

$$\mathrm{Rad_d}(A) = \bigcap\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{ht}\mathfrak{p} = \dim A\}.$$

De manière analogue, si la dimension valuative de A est finie, on appelle *radical valuatif* de A, et on note $\mathrm{Rad_v}(A)$, l'intersection des idéaux premiers de hauteur *valuative* maximale, soit

$$\mathrm{Rad_v}(A) = \bigcap\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{ht_v}\mathfrak{p} = \dim_{\mathrm{v}} A\}.$$

On compare tout d'abord ces radicaux entre eux ainsi qu'avec le radical de Jacobson (intersection de *tous* les idéaux maximaux), noté $\mathrm{Rad}(A)$.

Proposition 3.1 *Soit A un anneau de dimension valuative finie. Alors*

(*i*) $\mathrm{Rad}(A) \subseteq \mathrm{Rad_d}(A)$ *et* $\mathrm{Rad}(A) \subseteq \mathrm{Rad_v}(A)$,

(*ii*) *Si A est local,* $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad_d}(A) = \mathrm{Rad_v}(A)$,

(*iii*) *Si A est coéquidimensionnel,* $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad_d}(A)$,

(*iv*) *Si A est localement de Jaffard,* $\mathrm{Rad_v}(A) = \mathrm{Rad_d}(A)$,

(*v*) *Si A est de Jaffard,* $\mathrm{Rad_v}(A) \subseteq \mathrm{Rad_d}(A)$.

Démonstration. On note aisément que les idéaux premiers de hauteur maximale (resp. de hauteur valuative maximale) sont maximaux. Seule la dernière assertion mérite donc vraiment démonstration. Il suffit de montrer que, si A est de Jaffard (soit $\dim A = \dim_{\mathrm{v}} A$) et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur maximale (soit $\dim A = \mathrm{ht}\mathfrak{p}$), alors $\mathfrak{p}$ est aussi de hauteur valuative maximale (soit $\dim_{\mathrm{v}} A = \mathrm{ht_v}\mathfrak{p}$). C'est clair puisqu'on a en effet

$$\dim A = \mathrm{ht}\mathfrak{p} \leq \mathrm{ht_v}\mathfrak{p} \leq \dim_{\mathrm{v}} A = \dim A. \diamond$$

Les exemples 3.10, 3.11 et 3.12 qu'on donne plus bas montrent que les inclusions entre le radical dimensionnel et le radical valuatif peuvent être strictes et même que ces radicaux peuvent être incomparables.

Il est clair que $\dim A$ (resp. $\dim_{\mathrm{v}} A$) est la borne supérieure des hauteurs (resp. des hauteurs valuatives) des idéaux premiers de A. Parmi ceux-ci, les idéaux qui ne se relèvent pas dans le localisé $A_f = A[\frac{1}{f}]$ (où f est un élément non nul de A) sont ceux auxquels f appartient. On a donc immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.2 *Soient A un anneau de dimension de Krull finie* (*resp. de dimension valuative finie*) *et f un élément non nul de A. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) $f \in \mathrm{Rad_d}(A)$ (*resp.* $f \in \mathrm{Rad_v}(A)$),

(*ii*) $\dim A_f < \dim A$ (*resp.* $\dim_{\mathrm{v}} A_f < \dim_{\mathrm{v}} A$).

On tire la proposition :

Proposition 3.3 *Soit D un anneau intègre de dimension de Krull finie* (*resp. de dimension valuative finie*). *Alors il existe un élément non nul f de D tel que* $\mathrm{Rad_d}(D_f) = (0)$ (*resp.* $\mathrm{Rad_v}(D_f) = (0)$).

Démonstration. On raisonne pour le radical dimensionnel (on ferait de même pour le radical valuatif) : Si $\mathrm{Rad_d}(D)$ n'est pas nul, il existe un élément non nul f_1 de D tel que $\dim D_{f_1} < \dim D$ [Lemme 3.2]. Ou bien $\mathrm{Rad_d}(D_{f_1}) = (0)$ ou bien de même il existe un élément non nul f_2 de D tel que $\dim (D_{f_1})_{f_2} < \dim D_{f_1}$. Comme $\dim D$ est finie, ce processus s'arrête. $\diamond$

On étudie maintenant les radicaux des anneaux de polynômes. On établit d'abord que le radical valuatif "se comporte bien".

Proposition 3.4 *Soit A un anneau de dimension valuative finie. Alors on a l'égalité* $\mathrm{Rad_v}\big(A[n]\big) = \mathrm{Rad_v}(A)[n]$.

Démonstration. Raisonnant par récurrence sur n, il suffit d'établir le résultat pour une seule indéterminée. On montre qu'un idéal (maximal) $\mathfrak{M}$ de $A[X]$ est de hauteur valuative maximale si et seulement si il est au-dessus d'un idéal (maximal) $\mathfrak{m}$ de hauteur valuative maximale dans A. Ceci permet de conclure. En effet, l'intersection des idéaux de hauteur valuative maximale dans $A[X]$ est alors celle de tous les idéaux maximaux au-dessus d'un idéal de hauteur valuative maximale de A, or l'intersection des idéaux maximaux au-dessus de $\mathfrak{m}$ est égale à $\mathfrak{m}[X]$.
— Si $\mathfrak{M}$ est de hauteur valuative maximale dans $A[X]$, on a la relation

$$\dim_{\mathrm{v}} A + 1 = \dim_{\mathrm{v}} A[X] = \mathrm{ht_v}\mathfrak{M}. \tag{1}$$

Le localisé $\mathfrak{M}A_{\mathfrak{m}}[X]$ est a fortiori de hauteur valuative maximale dans $A_{\mathfrak{m}}[X]$, donc

$$\mathrm{ht_v}\mathfrak{M} = \dim_{\mathrm{v}} A_{\mathfrak{m}}[X] = \dim_{\mathrm{v}} A_{\mathfrak{m}} + 1 = \mathrm{ht_v}\mathfrak{m} + 1. \tag{2}$$

Combinant (1) et (2), on tire l'égalité $\dim_v A = \mathrm{ht}_v \mathfrak{m}$.
— Réciproquement, supposons que $\mathfrak{m}$ soit de hauteur valuative maximale dans A. Comme $\mathfrak{M}$ est maximal, il contient strictement l'étendu $\mathfrak{m}[X]$ de $\mathfrak{m}$ et on a

$$\mathrm{ht}_v \mathfrak{M} \geq \mathrm{ht}_v \mathfrak{m}[X] + 1 = \mathrm{ht}_v \mathfrak{m} + 1 = \dim_v A + 1 = \dim_v A[X].$$

Donc $\mathrm{ht}_v \mathfrak{M} = \dim_v A[X]$. $\diamond$

Par contre, pour le radical dimensionnel, on a seulement le résultat suivant.

Proposition 3.5 *Soit A un anneau de dimension de Krull finie. Alors le radical dimensionnel $\mathrm{Rad_d}\big(A[n]\big)$ est l'intersection des étendus $\mathfrak{m}[n]$, où $\mathfrak{m}$ parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A tels que $\mathrm{ht}\mathfrak{m}[n] + n = \dim A[n]$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{M}$ un idéal (maximal) et $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A$. Il est classique que $\mathrm{ht}\mathfrak{M} = \mathrm{ht}\mathfrak{m}[n] + n$ [7, Theorem 1]. Donc $\mathfrak{M}$ est hauteur maximale dans $A[n]$ (soit $\mathrm{ht}\mathfrak{M} = \dim A[n]$) si et seulement si $\mathrm{ht}\mathfrak{m}[n] + n = \dim A[n]$ (en particulier $\mathfrak{m}$ est alors maximal). Le résultat suit puisque l'intersection des idéaux maximaux au-dessus de $\mathfrak{m}$ est égale à $\mathfrak{m}[n]$. $\diamond$

En général il n'est ni nécessaire ni suffisant que $\mathfrak{m}$ soit de hauteur maximale dans A pour que $\mathrm{ht}\mathfrak{m}[n] + n$ soit maximal (c'est à dire égal à $\dim A[n]$). Néanmoins, si A est local, les idéaux de hauteur maximale de $A[n]$ sont alors au dessus de l'idéal maximal de A. Dans ce cas, on tire le corollaire suivant.

Corollaire 3.6 *Soit A un anneau local de dimension de Krull finie. Alors on a l'égalité $\mathrm{Rad_d}(A)[n] = \mathrm{Rad_d}\big(A[n]\big)$.*

En général (si A n'est pas un anneau local) il n'y a pas égalité. La proposition suivante donne une condition suffisante pour avoir au moins une inclusion.

Proposition 3.7 *Soit A un anneau de dimension de Krull finie. Si on a l'égalité $\dim A[n] = \dim A + n$, alors on a l'inclusion $\mathrm{Rad_d}\big(A[n]\big) \subseteq \mathrm{Rad_d}(A)[n]$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de hauteur maximale de A. Alors

$$\mathrm{ht}\mathfrak{m}[n] + n \geq \mathrm{ht}\mathfrak{m} + n = \dim A + n = \dim A[n],$$

donc $\mathrm{ht}\mathfrak{m}[n] + n = \dim A[n]$. Ainsi $\mathrm{Rad_d}\big(A[n]\big) \subseteq \mathfrak{m}[n]$ [Proposition 3.5]. Comme ceci est vrai pour tout idéal $\mathfrak{m}$ de hauteur maximale, on tire l'inclusion voulue. $\diamond$

La proposition précédente s'applique bien sûr aux anneaux de Jaffard [1, definition-theorem 0.1]. On obtient un résultat plus fort avec des hypothèses plus précises.

Proposition 3.8 *Soit A un anneau de dimension de Krull finie. Si A est localement de Jaffard, ou bien si A est un anneau de Jaffard coéquidimensionnel, alors $\mathrm{Rad_d}\big(A[n]\big) = \mathrm{Rad_d}(A)[n] = \mathrm{Rad_v}(A)[n] = \mathrm{Rad_v}\big(A[n]\big)$.*

Démonstration. — Si A est localement de Jaffard, le radical dimensionnel et le radical valuatif de A sont égaux [Proposition 3.1 (iv)] ; on peut dire la même chose pour $A[n]$ (qui est également localement de Jaffard [14, Lemme 1.4]). On conclut en appliquant la Proposition 3.4.
— Si A est un anneau de Jaffard coéquidimensionnel, on a les égalités $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A) = \mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A)$ [Proposition 3.1 (i), (iii) et (v)]. De la Proposition 3.4 on tire alors

$$\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)[n] = \mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A)[n] = \mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}\big(A[n]\big). \tag{1}$$

Par ailleurs, comme A est de Jaffard, il en est de même de $A[n]$ [1, Proposition 1.2]. De la Proposition 3.1 (v) on tire alors l'inclusion

$$\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}\big(A[n]\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big). \tag{2}$$

De la Proposition 3.7, on tire enfin

$$\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)[n]. \tag{3}$$

On a bien évidemment le résultat en combinant (1), (2) et (3). $\diamond$

Remarque 3.9 Soit A un anneau de dimension valuative finie. On sait que $A[n]$ est localement de Jaffard pour tout $n \geq \dim_{\mathrm{v}} A - 1$ [9, Proposition 1]. Il résulte donc des Propositions 3.1 et 3.4 que, pour un tel entier n, on a

$$\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A)[n] = \mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}\big(A[n]\big) = \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A[n]),$$

et en particulier,

— si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A) \subset \mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A)$, alors $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)[n] \subset \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big)$,

— si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A) \subset \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)$, alors $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big) \subset \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)[n]$,

— si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)$ et $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A)$ sont incomparables, $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big)$ et $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)[n]$ sont alors incomparables.

Enfin les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(A) = (0)$,

(ii) pour tout $n \geq \dim_{\mathrm{v}} A - 1, \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big) = (0)$,

(iii) il existe $n \geq \dim_{\mathrm{v}} A - 1$ tel que $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big) = (0)$.

On donne maintenant des exemples d'anneaux intègres où les inclusions entre le radical dimensionnel et le radical valuatif sont strictes, voire où ces radicaux sont incomparables (d'après la remaraque précédente, ce sont aussi des exemples où on a les conclusions correspondantes pour $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}\big(A[n]\big)$ et $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(A)[n]$). Ces exemples sont réalisés au moyen de généralisations de la construction $D + M$.

Exemple 3.10 *Un anneau D (intègre de dimension 1) tel qu'on a l'inclusion stricte* $\mathrm{Rad_d}(D) \subset \mathrm{Rad_v}(D)$.
Soient k un corps, K une extension transcendante de $k, K[t]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée sur K et D l'anneau $D = k + tK[t]$. Les anneaux D et $K[t]$ "partagent" l'idéal $\mathfrak{m} = tK[t]$. On tire par exemple de [1, Lemma 2.1 and Proposition 2.5] que $\dim D = 1$ et $\dim_{\mathrm{v}} D = 1 + \mathrm{d.t.}[K : k]$ (et en particulier que D n'est pas un anneau de Jaffard). Par ailleurs, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de D distinct de $\mathfrak{m}$, on a $D_{\mathfrak{p}} = K[t]_{\mathfrak{p}}$. Il en résulte que $\mathfrak{m}$ est le seul idéal de D de hauteur valuative supérieure à 1. Ainsi $\mathrm{Rad_v}(D) = \mathfrak{m} \neq (0)$ tandis qu'on a facilement $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$ (puisque $\mathrm{Rad_d}(D)$ est l'intersection des idéaux premiers de hauteur 1 de $K[t]$).

Exemple 3.11 *Un anneau D (intègre, de Jaffard et de dimension 2) tel qu'on a l'inclusion stricte* $\mathrm{Rad_v}(D) \subset \mathrm{Rad_d}(D)$.
A l'aide de pullbacks, on peut construire un anneau semi-local possédant seulement deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$, l'un tel que $\mathrm{ht}\mathfrak{m} = \mathrm{ht_v}\mathfrak{m} = 2$, l'autre tel que $\mathrm{ht}\mathfrak{n} = 1$ et $\mathrm{ht_v}\mathfrak{n} = 2$ [9, Exemple 2, p 135]. Il est clair que $\mathrm{Rad_d}(D) = \mathfrak{m}$ et $\mathrm{Rad_v}(D) = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$.

Exemple 3.12 *Un anneau D (intègre de dimension 2) tel que* $\mathrm{Rad_v}(D)$ *et* $\mathrm{Rad_d}(D)$ *sont incomparables.*
Comme pour l'exemple précédent, on peut construire, à l'aide de pullbacks, un anneau semi-local possédant seulement deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$, l'un tel que $\mathrm{ht}\mathfrak{m} = \mathrm{ht_v}\mathfrak{m} = 2$, l'autre tel que $\mathrm{ht}\mathfrak{n} = 1$ et $\mathrm{ht_v}\mathfrak{n} = 3$ [9, pp 134–135]. Il est clair que $\mathrm{Rad_d}(D) = \mathfrak{m}$ et $\mathrm{Rad_v}(D) = \mathfrak{n}$, donc que ces radicaux sont incomparables.

Si B est entier sur A, on veut enfin comparer les radicaux de B et de A. On établit d'abord une propriété des hauteurs valuatives tout à fait analogue aux propriétés classiques des hauteurs.

Lemme 3.13 *Soient B une extension entière de A et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B au-dessus de $\mathfrak{p}$, on a alors* $\mathrm{ht_v}\mathfrak{q} \leq \mathrm{ht_v}\mathfrak{p}$. *Si en outre* $\mathrm{ht_v}\mathfrak{p}$ *est fini, il existe $\mathfrak{q}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, tel que* $\mathrm{ht_v}\mathfrak{q} = \mathrm{ht_v}\mathfrak{p}$.

Démonstration. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $B_{\mathfrak{p}}$ est entier sur $A_{\mathfrak{p}}$, ainsi $\mathrm{ht_v}\mathfrak{p} = \dim_{\mathrm{v}} A_{\mathfrak{p}} = \dim_{\mathrm{v}} B_{\mathfrak{p}}$ est la borne supérieure des hauteurs valuatives des idéaux premiers de B qui se relèvent dans $B_{\mathfrak{p}}$. En particulier, si $\mathfrak{q}$ est au-dessus de $\mathfrak{p}$, alors $\mathrm{ht_v}\mathfrak{q} \leq \dim_{\mathrm{v}} B_{\mathfrak{p}}$. Si en outre $\mathrm{ht_v}\mathfrak{p}$ est fini, un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B réalise alors cette borne supérieure ; $\mathfrak{q}$ se relève en un idéal maximal de $B_{\mathfrak{p}}$, il est donc au-dessus de $\mathfrak{p}$. ⋄

Il résulte de ce lemme que les idéaux de hauteur valuative maximale de B sont au-dessus d'idéaux de hauteur valuative maximale de A et que les idéaux de hauteur valuative maximale de A se relèvent en des idéaux de hauteur valuative maximale de B. On a par ailleurs un résultat analogue pour les hauteurs. On conclut donc aisément avec la proposition suivante.

Proposition 3.14 *Soient A un anneau de dimension de Krull finie* (*resp. de dimension valuative finie*) *et B une extension entière de A. Alors on a l'égalité* $\mathrm{Rad_d}(A) = \mathrm{Rad_d}(B) \cap A$ (*resp.* $\mathrm{Rad_v}(A) = \mathrm{Rad_v}(B) \cap A$).

4 Radicaux, dimensions et anneaux de Jaffard

On revient à l'étude des sous-extensions d'un anneau intègre. On établit d'abord deux résultats très voisins, portant respectivement sur leur dimension de Krull et leur dimension valuative.

Proposition 4.1 *Soit D un anneau intègre de dimension de Krull finie. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$,

(*ii*) *Pour toute sous extension R de D, on a* $\mathrm{dim}R \geq \mathrm{dim}D + \mathrm{d.t.}[R : D]$,

(*iii*) *Pour tout élément non nul f de D, on a* $\mathrm{dim}D_f = \mathrm{dim}D$,

(*iv*) *Pour tout élément non nul f de D, on a* $\mathrm{Rad_d}(D_f) = (0)$.

Démonstration. (i)$\Rightarrow$ (ii) Soit R une sous-extension de D, c'est à dire un anneau compris entre D et une D-algèbre (intègre) de type fini T. On pose $n = \mathrm{d.t.}[R : D]$.
— On traite d'abord du cas où $R = T$ est une D-algèbre de type fini. D'après le lemme de normalisation d'Emmy Noether [16, (14.4)], il existe une sous-D-algèbre de T isomorphe à $D[n]$ et $f \neq 0$ dans D tel que T_f soit entier sur $D_f[n]$. Donc $\mathrm{dim}T \geq \mathrm{dim}T_f = \mathrm{dim}D_f[n] \geq \mathrm{dim}D_f + n = \mathrm{dim}D + n$ (on a l'égalité $\mathrm{dim}D_f = \mathrm{dim}D$, puisqu'on suppose que $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$ [Lemme 3.2]).
— On passe alors au cas général (où $R \subseteq T$). Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de T, maximal parmi les idéaux tels que $\mathfrak{q} \cap R = (0)$, on peut remplacer T par le quotient $T/\mathfrak{q}$ (qui est encore une D-algèbre intègre de type fini contenant R). Ceci fait, T est alors algébrique sur R. En effet, considérant la partie multiplicative S de R complémentaire de 0, l'extension $S^{-1}R \subseteq S^{-1}T$ est une extension de corps de type fini, donc une extension algébrique d'après le théorème du Nullstellensatz [15, (5.2)]. On a donc $n = \mathrm{d.t.}[R : D] = \mathrm{d.t.}[T : D]$. D'autre part il existe un élément non nul g de R tel que T_g soit entier sur R_g. On note que $T_g = T[1/g]$ est une D-algèbre de type fini. On a alors $\mathrm{dim}R \geq \mathrm{dim}R_g = \mathrm{dim}T_g \geq \mathrm{dim}D + n$ (la dernière inégalité en vertu du cas particulier établi ci-dessus).
(ii)$\Rightarrow$ (iii) Immédiat.
(iii)$\Rightarrow$ (iv) Supposons par l'absurde que $\mathrm{Rad_d}(D_f)$ ne soit pas nul. D'après le Lemme 3.2, on trouve un élément non nul g de D_f, qu'on peut supposer dans D, tel que $\mathrm{dim}D_{fg} = \mathrm{dim}(D_f)_g < \mathrm{dim}D_f \leq \mathrm{dim}D$. Ceci contredit l'hypothèse.
(iv)$\Rightarrow$ (i) Il suffit de prendre $f = 1$. $\diamond$

Ainsi qu'on l'a rappelé plus haut [démonstration de la Proposition 2.3], on a toujours *l'inégalité de la dimension valuative* $\mathrm{dim_v}R \leq \mathrm{dim_v}D + \mathrm{d.t.}[R : D]$. En particulier, si D est de dimension valuative finie, alors R l'est aussi.

Si on remplace partout dimension de Krull par dimension valuative dans la dernière proposition, on tire le résultat suivant.

Proposition 4.2 *Soit D un anneau intègre de dimension valuative finie. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) = (0)$,

(ii) *Pour toute sous-extension R de D, on a* $\dim_{\mathrm{v}} R = \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]$,

(ii') *Pour toute sous-extension R de D, on a* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(R) = (0)$,

(iii) *Pour tout élément non nul f de D, on a* $\dim_{\mathrm{v}} D_f = \dim_{\mathrm{v}} D$,

(iv) *Pour tout élément non nul f de D, on a* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D_f) = (0)$.

Démonstration. Pour l'essentiel, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition précédente. Il reste alors à montrer que (ii) implique (ii'). Supposons donc que, pour toute sous-extension R de D, on a $\dim_{\mathrm{v}} R = \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]$. Alors pour tout élément non nul f de R, on a $\dim_{\mathrm{v}} R_f = \dim_{\mathrm{v}} R$ (il est en effet facile de voir que R_f est aussi une sous-extension de D). Du Lemme 3.2, on conclut que $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(R) = (0)$. $\diamond$

Toujours avec les mêmes notations, notons que, contrairement au cas du radical valuatif, si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = 0$, alors $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R)$, n'est pas nécessairement nul (il n'est même pas toujours bien défini, puisque R peut être de dimension infinie). En fait on a le résultat suivant.

Proposition 4.3 *Soient D un anneau intègre de dimension de Krull finie tel que* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$, *et R une sous-extension de D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *R est de dimension de Krull finie, algébrique sur D, et* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$.

(ii) $\dim R = \dim D$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si R est algébrique sur D, il existe $f \neq 0$ dans D tel que R_f soit entier sur D_f et donc $\dim D_f = \dim R_f$. Comme $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$, on a $\dim D = \dim D_f$ [Lemme 3.2]. De même, supposant R de dimension de Krull finie et tel que $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$, on a $\dim R = \dim R_f$. Finalement

$$\dim R = \dim R_f = \dim D_f = \dim D.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $\dim R = \dim D$, alors bien sûr R est de dimension de Krull finie. Il résulte ensuite de la relation $\dim R \geq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$ [Proposition 4.1] que R est algébrique sur D. Enfin, pour tout $f \neq 0$ de R, comme R_f est aussi une sous-extension de D, on a $\dim R_f \geq \dim D$ [Proposition 4.1]. Comme $\dim R = \dim D$, on tire $\dim R_f = \dim R$. On conclut que $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$ grâce au Lemme 3.2. $\diamond$

On complète alors un résultat de N.Onoda [17, corollary 1.22], en donnant des conditions pour que toute sous-extension de D soit de Jaffard.

Théorème 4.4 *Soit D un anneau intègre de dimension valuative finie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *D est un anneau de Jaffard et* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$,

(*ii*) *Pour toute sous-extension R de D, on a* $\dim R = \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$,

(*ii'*) *Pour tout suranneau de type fini R de D, on a* $\dim R = \dim D$,

(*iii*) $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) = (0)$ *et toute sous-extension de D est de Jaffard,*

(*iii'*) $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) = (0)$ *et, pour tout élément non nul f de D, D_f est un anneau de Jaffard,*

(*iv*) *Pour toute sous-extension R de D, on a* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$,

(*iv'*) *Pour tout suranneau de type fini R de D, on a* $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$.

Démonstration.
On observe tout d'abord que (ii) $\Rightarrow$ (ii'), (iii) $\Rightarrow$ (iii') et (iv) $\Rightarrow$ (iv') sont évidents. On complète alors la preuve en démontrant les implications suivantes.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit R une sous-extension de D. Si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$, on a l'inégalité $\dim R \geq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$ [Proposition 4.1]. Si D est de Jaffard, on a alors une égalité, puisqu'inversement on a $\dim R \leq \dim_{\mathrm{v}} R \leq \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]$.
(ii') $\Rightarrow$ (i) Si tout suranneau R de D de type fini est tel que $\dim R = \dim D$, il résulte alors d'une des définitions de la dimension valuative que $\dim_{\mathrm{v}} D = \dim D$ [12, (30.8)], soit que D est un anneau de Jaffard. Pour tout $f \neq 0$ de D, on a en particulier $\dim D_f = \dim D$, donc $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$ [Lemme 3.2].
(i) $\Rightarrow$ (iii) Si D est un anneau de Jaffard, alors $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D)$ [Proposition 3.1]. Si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$, on a donc $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) = (0)$. Pour toute sous-extension R de D, on a donc par ailleurs $\dim_{\mathrm{v}} R = \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]$ [Proposition 4.2], et $\dim R \geq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]$ [Proposition 4.1]. Comme par hypothèse $\dim_{\mathrm{v}} D = \dim D$, on tire $\dim R \geq \dim_{\mathrm{v}} R$, soit $\dim R = \dim_{\mathrm{v}} R$, c'est à dire que R est un anneau de Jaffard.
(iii') $\Rightarrow$ (i) Si $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) = (0)$, on a $\dim_{\mathrm{v}} D = \dim_{\mathrm{v}} D_f$ pour tout $f \neq 0$ de D [Lemme 3.2]. Donc $\dim D_f \leq \dim D \leq \dim_{\mathrm{v}} D = \dim_{\mathrm{v}} D_f = \dim D_f$ (puisque par hypothèse D_f est de Jaffard). On tire $\dim D = \dim_{\mathrm{v}} D$, c'est à dire que D est un anneau de Jaffard. On tire aussi $\dim D_f = \dim D$ pour tout $f \neq 0$, donc $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$ [Lemme 3.2].
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Soit R une sous-extension de D. Comme $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(D) = (0)$, alors $\mathrm{Rad}_{\mathrm{v}}(R) = (0)$ [Proposition 4.2]. Donc $\dim_{\mathrm{v}} R_f = \dim_{\mathrm{v}} R$ pour tout $f \neq 0$ de R [encore le Lemme 3.2]. Par ailleurs, comme R et R_f sont des sous-extensions de D, ce sont par hypothèse des anneaux de Jaffard. De l'égalité des dimensions valuatives, on tire donc celle des dimensions, soit $\dim R_f = \dim R$. Ainsi $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$ [toujours le Lemme 3.2].
(iv') $\Rightarrow$ (ii') L'hypothèse implique en particulier que $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(D) = (0)$. Soit R un suranneau de type fini. Sa dimension de Krull est finie (puisque la dimension valuative de D est supposée finie), il est algébrique sur D et par hypothèse $\mathrm{Rad}_{\mathrm{d}}(R) = (0)$. La Proposition 4.3 permet de conclure que $\dim R = \dim D$. $\diamond$

Remarque 4.5 Dans le théorème précédent, contrairement à l'assertion (iii'), on ne peut se limiter aux suranneaux de la forme D_f pour les assertions (ii') et (iv'). On a en effet donné l'exemple d'un anneau D tel que $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$ mais qui n'est pas de Jaffard [Exemple 3.10]. Pour tout $f \neq 0$ de D, on a pourtant $\dim D_f = \dim D$ [Lemme 3.2], et donc aussi $\mathrm{Rad_d}(D_f) = (0)$ [Proposition 4.3].

Questions 4.6 1) Suffit-il que D_f soit de Jaffard, pour tout $f \neq 0$, afin que toute sous-extension de D soit de Jaffard (sans supposer $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$) ?
2) Soit D un anneau de Jaffard. Si $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$ alors $\mathrm{Rad_v}(D) = (0)$. A-t-on la réciproque dans ce cas ? (c'est vrai si D est *localement* de Jaffard).

A propos de la première de ces questions, on note qu'il se peut que D soit de Jaffard mais que D_f ne le soit pas. Ainsi dans l'Exemple 3.11, D est de Jaffard et semi-local et le localisé $D_{\mathfrak{m}}$ (qui n'est pas de Jaffard) est de la forme D_f. La proposition suivante jette quelque lumière sur la deuxième question.

Proposition 4.7 *Soit D un anneau de dimension valuative finie, tel qu'il existe une extension de type fini $D \subseteq R$, où R est intègre et noethérien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *D est un anneau de Jaffard et* $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$,

(*ii*) $\mathrm{Rad_v}(D) = (0)$.

Démonstration. Il reste à montrer que (ii) implique (i). Si $\mathrm{Rad_v}(D) = (0)$, on tire de la Proposition 4.2 l'égalité

$$\dim_{\mathrm{v}} R = \dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D]. \tag{1}$$

Comme l'extension $D \subseteq R$ est de type fini et que R est noethérien, on a l'inégalité de la dimension [Théorème 1.2], donc

$$\dim R \leq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]. \tag{2}$$

Comme R est noethérien, c'est a fortiori un anneau de Jaffard et $\dim R = \dim_{\mathrm{v}} R$. De (1) et (2) on tire donc

$$\dim_{\mathrm{v}} D + \mathrm{d.t.}[R : D] = \dim_{\mathrm{v}} R = \dim R \leq \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D]. \tag{3}$$

Comme on a toujours $\dim D \leq \dim_{\mathrm{v}} D$, on tire $\dim D = \dim_{\mathrm{v}} D$ et D est de Jaffard.

En outre, pour tout élément $f \neq 0$ de $D, \mathrm{Rad_v}(D_f) = 0$ [Proposition 4.2] et R_f est noethérien. Si on considère les extensions $D \subseteq R_f$ et $D_f \subseteq R_f$, on obtient de même des relations analogues à la relation (3), et en particulier

$$\dim R_f = \dim D + \mathrm{d.t.}[R : D], \tag{4}$$

$$\dim R_f = \dim D_f + \mathrm{d.t.}[R : D]. \tag{5}$$

Donc $\dim D = \dim D_f$ pour tout $f \neq 0$. Finalement $\mathrm{Rad_d}(D) = (0)$ [Lemme 3.2]
◇

5 Sous extensions de corps

On considère maintenant une sous-extension R d'un corps k. Comme un corps est bien évidemment un anneau de Jaffard de radical dimensionnel trivial, on tire du Théorème 4.4 le résultat suivant qu'on donne pour mémoire.

Proposition 5.1 *Soit R une sous-extension d'un corps k. Alors*

(*i*) *R est un anneau de Jaffard,*

(*ii*) $\dim R = \text{d.t.}[R : k]$,

(*iii*) $\text{Rad}_\text{d}(R) = \text{Rad}_\text{v}(R) = (0)$.

On veut établir des conclusions plus fortes en ajoutant quelques hypothèses. On commence par un lemme qui classe les hypothèses en question et précise un résultat de A. Wadsworth [18, Theorem 2]. Pour cela on dira tout d'abord qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R *vérifie la formule de la dimension* si on a la relation

$$\text{ht}\mathfrak{p} + \text{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k] = \text{d.t.}[R : k].$$

Comme les idéaux premiers de R sont au-dessus de l'idéal (0) de k (qui est de hauteur 0), on pourra noter que dire qu'ils vérifient tous la formule de la dimension revient à dire que l'extension $k \subseteq R$ vérifie la formule de la dimension. On rappelle qu'il en est ainsi lorsque R est une k-algèbre de type fini [16, (14.6)], et qu'en tout cas l'extension $k \subseteq R$ vérifie l'inégalité de la dimension [15, (15.5)].

Lemme 5.2 *Soient R une sous-extension d'un corps k et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R. Alors chacune des assertions ci-dessous implique la suivante.*

(*A*) *$\mathfrak{p}$ se relève dans une k-algèbre* (*intègre*) *de type fini qui contient R,*

(*B*) *$\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension,*

(*C*) *$R/\mathfrak{p}$ est une sous-extension de k,*

(*D*) *$\mathfrak{p}$ est l'intersection d'idéaux maximaux de R.*

Démonstration. On montre ici que (A) $\Rightarrow$ (B), en effet les autres implications ont été démontrées par A. Wadsworth [18, Theorem 2]. Soit donc T une k-algèbre (intègre) de type fini contenant R et où $\mathfrak{p}$ se relève. L'extension $k \subseteq R$ vérifie l'inégalité de la dimension et l'extension $k \subseteq T$ vérifie la formule de la dimension (puisque T est une k-algèbre de type fini). On peut alors conclure du Lemme 3.1 (iii) de [3] que $\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension. $\diamond$

Remarques 5.3 On se place dans la situation du lemme précédent.
1) On peut noter l'analogie de la première implication avec la Proposition 2.7.
2) Pour la dernière implication, on peut observer que si $R/\mathfrak{p}$ est une sous-extension de k, alors $\text{Rad}_\text{d}(R/\mathfrak{p}) = (0)$ [Proposition 5.1]. A fortiori le radical de Jacobson de $R/\mathfrak{p}$ est nul, ce qui revient à l'hypothèse (D).

3) Si tous les idéaux premiers de R vérifient l'une de ces hypothèses, il résulte alors de la dernière que R est un anneau de Hilbert. En fait, on a la même conclusion en ne considérant que les idéaux premiers non maximaux de R.
4) A. Wadsworth montre que la dernière hypothèse (la plus faible) n'est pas nécessairement vérifiée pour tout idéal premier de R [18, Example 1]. Il montre aussi que les hypothèses (A) et (B) sont équivalentes pour les idéaux premiers de hauteur 1 [18, Corollary 1]. Néanmoins il donne un contre exemple prouvant qu'il n'en est rien en général [18, Example 2].
5) Si un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R vérifie l'hypothèse (C), soit $R/\mathfrak{m}$ est contenu dans une k-algèbre (intègre) T de type fini, alors $R/\mathfrak{m}$ est contenu dans un corps (quotient de T par un idéal maximal) qui est une k-algèbre de type fini. Par application du théorème du Nullstellensatz, ce corps est une extension algébrique, nécessairement finie de k. Ainsi, pour que $\mathfrak{m}$ vérifie (C), il faut (et manifestement il suffit) que $R/\mathfrak{m}$ soit une k-algèbre finie. On donne plus bas un exemple montrant qu'il n'en est pas toujours ainsi [Exemple 5.10].

On montre (de manière analogue à [17, Lemma 1.14]) que les idéaux de hauteur maximale de R vérifient la formule de la dimension :

Proposition 5.4 *Soient R une sous-extension d'un corps k et $\mathfrak{m}$ un idéal (maximal) de hauteur maximale dans R. Alors $\mathfrak{m}$ vérifie la formule de la dimension et $R/\mathfrak{m}$ est une extension algébrique finie de k.*

Démonstration. Par hypothèse $\mathrm{ht}\mathfrak{m} = \dim R$; en vertu de la Proposition 5.1 (ii), on a par ailleurs $\mathrm{d.t.}[R : k] = \dim R$; comme enfin l'extension $k \subseteq R$ vérifie l'inégalité de la dimension, on tire

$$\dim R \leq \mathrm{ht}\mathfrak{m} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{m} : k] \leq \mathrm{d.t.}[R : k] = \dim R.$$

On a donc des égalités et $\mathfrak{m}$ vérifie la formule de la dimension. Comme (B) implique (C), $R/\mathfrak{m}$ est une sous-extension de k et d'après la Remarque 5.3 (5), c'est une extension algébrique finie de k. $\diamond$

On donne maintenant une condition équivalente à l'hypothèse (B).

Lemme 5.5 *Soient R une sous-extension d'un corps k et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*B*) *$\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension,*

(*B'*) *Par $\mathfrak{p}$ passe une chaîne de longueur maximale de R.*

Démonstration. L'extension $k \subseteq R$ vérifie l'inégalité de la dimension ; par ailleurs $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k]$; enfin $\mathrm{d.t.}[R : k] = \dim R$ [Proposition 5.1]. On a donc finalement

$$\mathrm{ht}\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k] \leq \mathrm{d.t.}[R : k] = \dim R.$$

Dire que par $\mathfrak{p}$ passe une chaîne de longueur maximale de R c'est dire qu'on a une égalité entre les termes extrêmes de cette relation. En particulier $\mathfrak{p}$ vérifie alors la formule de la dimension.

Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension, on a

$$\mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k] = \mathrm{d.t.}[R : k] = \dim R.$$

Par ailleurs $R/\mathfrak{p}$ est alors une sous-extension de k [Lemme 5.2] ; on a donc $\dim(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k]$ [Proposition 5.1]. Ainsi $\mathrm{ht}\mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim R$ et par $\mathfrak{p}$ passe une chaîne de longueur maximale de R. $\diamond$

Si par tout idéal premier passe une chaîne de longueur maximale, alors en particulier R est coéquidimensionnel et on tire de [9, Lemme 2] la proposition suivante.

Proposition 5.6 *Soit R une sous-extension d'un corps k. Si l'extension $k \subseteq R$ vérifie la formule de la dimension, alors R est un anneau de Hilbert, coéquidimensionnel, résiduellement et localement de Jaffard.*

On donne maintenant des conditions relatives à la caténarité d'une sous-extension de k. Pour cela, on dira que l'extension $k \subseteq R$ *vérifie résiduellement la formule de la dimension* si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, l'extension $k \subseteq R/\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension.

Lemme 5.7 *Soit R une sous-extension d'un corps k. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *R est caténaire et coéquidimensionnel,*

(ii) R est caténaire et l'extension $k \subseteq R$ vérifie la formule de la dimension,

(*iii*) *l'extension $k \subseteq R$ vérifie résiduellement la formule de la dimension.*

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Si R est caténaire, il est coéquidimensionnel si et seulement si, par tout idéal premier, passe une chaîne de longueur maximale. Il résulte du Lemme 5.5 que cette dernière condition est vérifiée si et seulement si l'extension $k \subseteq R$ vérifie la formule de la dimension.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Si l'extension $k \subseteq R$ vérifie résiduellement la formule de la dimension, elle vérifie a fortiori la formule de la dimension. On peut donc supposer a priori que tout idéal premier de R vérifie la formule de la dimension. Soient alors $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ deux idéaux premiers de R. On a donc

$$\mathrm{ht}\mathfrak{q} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : k] = \mathrm{d.t.}[R : k] = \mathrm{ht}\mathfrak{p} + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k]. \tag{1}$$

Si R est caténaire, alors $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}\mathfrak{q} - \mathrm{ht}\mathfrak{p}$ et on tire

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) + \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{q} : k] = \mathrm{d.t.}[R/\mathfrak{p} : k]. \tag{2}$$

C'est à dire que l'idéal $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ du quotient $R/\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension.

Inversement, si l'extension $k \subseteq R$ vérifie résiduellement la formule de la dimension, on a la relation (2). En la combinant avec la relation (1), on tire $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}\mathfrak{q} - \mathrm{ht}\mathfrak{p}$. Comme ceci vaut pour tout couple $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ d'idéaux premiers, alors R est caténaire $\diamond$

Sous les hypothèses équivalentes du lemme, on tire de la Proposition 5.6 que le quotient $R/\mathfrak{p}$ est, pour tout $\mathfrak{p}$, un anneau de Hilbert localement de Jaffard. On peut alors conclure avec la proposition suivante.

Proposition 5.8 *Soit R une sous-extension d'un corps k. Si R vérifie les hypothèses équivalentes du lemme précédent, alors R est un anneau de Hilbert totalement de Jaffard.*

Pour un anneau de dimension au plus 2, on tire donc le corollaire suivant, de manière analogue à Wadsworth [18, Corollary 3].

Corollaire 5.9 *Soit R une sous-extension d'un corps k. Si* d.t.$[R : k] \leq 2$, *alors R est un anneau de Hilbert résiduellement de Jaffard. Si en outre R est coéquidimensionnel, alors il est totalement de Jaffard.*

Démonstration. D'une part le quotient de R par un idéal maximal est un corps, donc un anneau de Jaffard. D'autre part, si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal, alors $R/\mathfrak{p}$ n'est pas algébrique sur k. La condition d.t.$[R : k] \leq 2$ impose alors que $\mathfrak{p}$ vérifie la formule de la dimension, soit l'hypothèse (B). Comme (B) implique (C), le quotient $R/\mathfrak{p}$ est une sous-extension, donc encore un anneau de Jaffard [Proposition 5.1]. Finalement R est résiduellement de Jaffard. Du fait que tout idéal premier non maximal vérifie l'hypothèse (C) on tire aussi que R est un anneau de Hilbert [Remarques 5.3 (3)]. Enfin R est caténaire, puisque de dimension au plus 2. Si R est coéquidimensionnel, il vérifie alors les assertions équivalentes du Lemme 5.7 et grâce à la proposition précédente on peut conclure qu'il est totalement de Jaffard. $\diamond$

Exemple 5.10 *Une sous-extension R d'un corps k, de dimension de Krull* 2, *avec un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de hauteur* 1 *et tel que $R/\mathfrak{m}$ n'est pas une sous-extension. A fortiori $\mathfrak{m}$ ne vérifie pas la formule de la dimension ; R n'est pas coéquidimensionnel, toutefois il est totalement de Jaffard.*

C'est une variante d'un exemple de A. Wadsworth [18, Remarks 3] que l'on détaille un peu. On considère un corps F de caractéristique p, on pose $k = F(t)$, où t est une indéterminée et on note k' la clôture algébrique de k. On note alors V' l'anneau de valuation discrète $V' = k'[[x]]$ des séries formelles à coefficients dans le corps k'.

On pose $y = \sum_{i=1}^{\infty} t^{(1/p^{c_i})}x^i$, où $c_i = \frac{i(i+1)}{2}$, puis $B = k[y, 1/x]$ et enfin $R = B \cap V'$. Ainsi R est une sous-extension de k (puisque B est une k-algèbre de type fini). On observe au passage que R est aussi un anneau de Krull. En effet, si on note $L = k(y, 1/x)$ le corps des fractions de B et $V = L \cap V'$, alors V est l'anneau d'une valuation discrète de L et $R = B \cap V$.

On considère l'idéal premier $\mathfrak{m} = xV' \cap R$, trace de l'idéal maximal $\mathfrak{m}' = xV'$ de V' dans R. Comme $V'/\mathfrak{m}' \simeq k'$ est une extension algébrique de k, alors $R/\mathfrak{m}$ est un corps (lui-même algébrique sur k). Ainsi $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de R. On montre que $R/\mathfrak{m}$ contient une copie de $k(t^{1/p}, t^{1/p^2}, \ldots)$. En effet y/x est un élément de R qui n'est pas dans $\mathfrak{m}$ et on a facilement $y/x = t^{1/p} + xy_1$ dans V' donc $R/\mathfrak{m}$ contient une copie de $k(t^{1/p})$. De même $y^p = tx^p + t^{1/p^2}x^{2p} + x^{2p}xy_2$. Ainsi $\frac{y^p - tx^p}{x^{2p}}$ est un élément de R qui n'est pas dans $\mathfrak{m}$ et de la forme $t^{1/p^2} + xy_2$ dans V', donc $R/\mathfrak{m}$ contient une copie de $k(t^{1/p}, t^{1/p^2})$. On peut raisonner de la sorte de proche en proche. En conclusion, $R/\mathfrak{m}$ n'est pas une extension finie de

k, et comme $\mathfrak{m}$ est maximal, $R/\mathfrak{m}$ n'est pas une sous-extension [Remarques 5.3 (5)]. On voit alors, de manière un peu détournée, que $\mathfrak{m}$ n'est pas de hauteur maximale [Proposition 5.4]. Ainsi x et y sont algébriquement indépendants sur k, B est de dimension 2 et $\mathfrak{m}$ est de hauteur 1 (en particulier R n'est évidemment pas coéquidimensionnel).

On montre enfin que R est néanmoins totalement de Jaffard. En effet, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R distinct de $\mathfrak{m}$, on a $R_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}} \cap V_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$ (car le complémentaire de $\mathfrak{p}$ rencontre $\mathfrak{m}$ donc $V_{\mathfrak{p}}$ est le corps des fractions L de B), ainsi $R_{\mathfrak{p}}$ est noethérien. Et comme V est l'anneau d'une valuation essentielle de R, alors $R_{\mathfrak{m}} = V$ et $R_{\mathfrak{m}}$ est également noethérien.

Remarque 5.11 On peut se demander si toute sous-extension d'un corps k est localement de Jaffard, ceci en particulier dans le cas de dimension 2. Au moment où cet article est revu par les auteurs, A. Ayache aurait un contre-exemple (qu'il se propose de publier ultérieurement).

Les assertions équivalentes du Lemme 5.7 sont vérifiées lorsque toute paire d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ de R se relève dans une k-algèbre de type fini. En effet l'idéal $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ du quotient $R/\mathfrak{p}$ vérifie alors la condition (A) du Lemme 5.2. C'est le cas si R est de la forme $R = k + I$, où I est un idéal non nul d'une k-algèbre T de type fini (en effet I est alors maximal dans R et toute chaîne de R se relève dans T [8, Proposition 4]). On retrouve ainsi la Proposition 1.4 de [2] :

Corollaire 5.12 *Soit R une k-algèbre de la forme $R = k + I$, où I est un idéal non nul d'une k-algèbre de type fini. Alors R est un anneau de Hilbert caténaire, coéquidimensionnel et totalement de Jaffard.*

References

[1] D.F.Anderson, A.Bouvier, D.E.Dobbs, M.Fontana and S.Kabbaj, On Jaffard domains. *Expo. Math.* **5**, (1988) 145–175.

[2] A.Ayache, Sous anneaux de la forme $D + I$ d'une K-algèbre intègre. *Portugaliae Math.* **50**, (1993), 139–149.

[3] A.Ayache et P.-J.Cahen, Anneaux vérifiant absolument l'inégalité ou la formule de la dimension. *Bolletino U.M.I.***7 (6-B)**, (1992) 39–65.

[4] E.Bastida and R.Gilmer, Overrings and Divisorial ideals of rings of the form $D + M$. *Michigan Math. J.***20**, (1973) 79–95.

[5] A.Bouvier, D.E.Dobbs et M.Fontana, Universally catenarian integral domains. *Adv. in Math.* **72**, (1988) 211–238.

[6] A.Bouvier et S.Kabbaj, Examples of Jaffard domains. *Journal of pure and applied algebra.* **54**, (1988) 155–165.

[7] J.W.Brewer,P.A.Montgomerry,P.A.Rutter et W.J.Heinzer, Krull dimension of polynomial rings. *LNM.* **311**, 26–46, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[8] P.-J.Cahen, Couples d'anneaux partageant un idéal. *Archiv der Math.* **51**, (1988) 505–514.

[9] P.-J.Cahen, Construction B,I,D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard. *Archiv der Math.* **54**, (1990) 125–141.

[10] P.Eakin, A note on finite dimensional subrings of polynomial rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **31**, (1972) 75–80.

[11] M.Fontana, Topologically defined classes of commutative rings. *Annali di Matematica pura ed applicata* **123**, (1980) 331–355.

[12] R.Gilmer, *Multiplicative ideal theory.* Marcel Dekker, New York, 1974.

[13] J.M.Giral, Krull dimension, transcendence degree and subalgebras of finitely generated algebras. *Archiv der Math.* **36**, (1981) 305–312.

[14] S.Kabbaj, La formule de la dimension pour les S-domaines forts universels. *Bolletino U.M.I.* **5 (6-D)**, (1986) 145–161.

[15] H.Matsumara, *Commutative ring theory.* Cambridge University press, Cambridge, 1986.

[16] M.Nagata, *Local rings.* Interscience, New York – London, 1962.

[17] N.Onoda, Subrings of generated rings over a pseudo-geometric ring. *Japan J. of Math.* **10**, (1982), 29–53.

[18] A.Wadsworth, Hilbert subalgebras of finitely generated algebras. *J. of Algebra.* **43** (1976), 298–304.